sabato 7 novembre 2020 23:02

ESERCIZI SU SERIE A SEGNI POSITIVI

Stabilire il carattere delle seguenti serie

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^3+2n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n^3+2n+2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{n+3}{2n^3+2n+2} \sim \frac{n}{2n^3} = \frac{1}{2n^2} \to 0 \qquad \text{se } n\to\infty$$

Sempre per lo stesso motivo la serie CONVERGE per il teorema del confronto asintotico
Essendo asintotica all'infinito ad una serie che converge.

2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2+n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2+n+1}} \sim \frac{n^{1/3}}{n} \to 0 \qquad (\text{SCALA } \infty)$$

$n^{1/3}$ ... 1 ... 1

$$\frac{n^{1/3}}{n} = \frac{1}{n^{2/3}} > \frac{1}{n} \quad \text{(SERIE ARMONICA)}$$

La serie DIVERGE per il teorema del confronto

3) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + \log^3 n}{n! + 2^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n + \log^3 n}{n! + 2^n} \sim \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} \to 0$$

SICCOME $\frac{1}{(n-1)!} < \frac{1}{n^2}$ LA SERIE CONVERGE

4) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{\frac{2+n^2}{n+1}}}{2^{2n}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^{\frac{2+n^2}{n+1}}}{2^{2n}} \qquad \frac{2+n^2}{n+1} \sim \frac{n^2}{n} = n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3^n}{4^n}$$

$$n \to \infty \quad 4^{\cdots}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$$

Converge poiché è una serie geometrica con base <1.

$$\lim_{n \to \infty} \sum \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4$$

5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot 3^{n+1}}{n!}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot 3^{n+1}}{n!} = 0 \qquad (\text{scala } \infty)$$

Applichiamo il CRITERIO DEL RAPPORTO

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi. Se esiste il limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

- $l < 1 \to$ converge
- $l > 1 \to$ diverge
- $l = 1 \to$???

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n+1} \cdot 3^{n+2}}{(n+1)!}}{\dfrac{\sqrt{n} \cdot 3^{n+1}}{n!}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n+1} \cdot 3}{\sqrt{n}\ (n+1)} \sim \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}\ (n+1)}$$

$$= \frac{3}{n+1} \to 0$$

Dunque la serie CONVERGE per il criterio del rapporto

Potevo anche applicare il CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi. Se esiste il limite

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l \quad \begin{cases} l < 1 \to \text{converge} \\ l > 1 \to \text{diverge} \\ l = 1 \to ??? \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot 3^{n+1}}{n!}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n} \cdot 3^{n+1}}{n!}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} e^{\frac{1}{n}\left(\log \frac{\sqrt{n} \cdot 3^{n+1}}{n!}\right)}$$

$$\log \frac{\sqrt{n} \cdot 3^{n+1}}{n!} = \frac{1}{2} \log n + (n+1) \cdot \log 3 - \log n!$$

$$\sim - \log n! \to -\infty$$

$$\log n! > \log e^n = n$$

QUINDI SULLA SCALA DEGLI INFINITI

$$\log n! > n$$

DUNQUE

$$\lim_{n \to \infty} e^{\frac{-\log n!}{n}} = \frac{\infty}{\infty} \to \infty$$

$$= e^{-\infty} \to 0 \to$$ LA SERIE CONVERGE

6) $$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2 + 3\sqrt{n}}{n^2 + 4}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n^2+3\sqrt{n}}{n^2+4}\right) \sim \log\frac{n^2}{n^2} \to 0$$

poiche $\quad \dfrac{n^2+3\sqrt{n}}{n^2+4} \to 1$

$$\log\left(\frac{n^2+3\sqrt{n}}{n^2+4}\right) \to \frac{n^2+3\sqrt{n}}{n^2+4} - 1$$

$$= \frac{3\sqrt{n}-4}{n^2+4} \sim \frac{3}{n^{3/2}}$$

Per il CRITERIO DELLA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA la serie CONVERGE

7) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{n+1}{3-n^2}} - e^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{n+1}{3-n^2}} - e^{\frac{1}{n}}\right) = e^{\frac{\infty}{\infty}} - e^{\frac{1}{\infty}}$$

PER VERIFICARE I SEGNI POSITIVI

$$e^{\frac{n+1}{3-n^2}} > e^{1/n}$$

$$\frac{n+1}{\ldots} > \frac{1}{\ldots}$$

$$\frac{m+1}{3-m^2} > \frac{1}{m}$$

$$\frac{m\cdot(m+1) - (3-m^2)}{m\,(3-m^2)} > 0$$

N: $m^2 + m - 3 + m^2$

$= 2m^2 + m - 3 > 0$

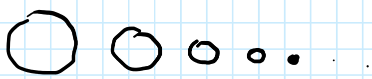
$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} \begin{cases} 1 \\ -3/2 \end{cases}$$

	$-\sqrt{3}$	$-3/2$	0	1	$\sqrt{3}$	
$+$		$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$-$		$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$-$		$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
				$-$	$+$	$-$

segni NON positivi

$$\sim e^{-\frac{1}{m}} - e^{\frac{1}{m}} \to e^0 - e^0 \longrightarrow 0$$

HO LA SOMMA DI tanti piccoli pezzettini ...



$$e^{\frac{m+1}{3-m^2}} - e^{\frac{1}{m}} \qquad \text{RACCOLGO } e^{1/m}$$

$$= e^{1/m}\left(e^{\frac{m+1}{3-m^2} - \frac{1}{m}} - 1\right)$$

$e^x - 1 \sim x$

se $e^x - 1 \to 0$

$e^x - 1 \sim x$

se $e^x - 1 \to 0$

$$e^{1/n} \sim 1$$

$$e^{\frac{n+1}{3-n^2} - \frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{n+1}{3-n^2} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{2n^2 + n - 3}{n(3-n^2)} \sim \frac{2}{n}$$

Si può concludere che la serie DIVERGE

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^3+1}{n^3-3n}\right) \cdot \log n$

$$\lim_{n \to \infty} \log\left(\frac{n^3+1}{n^3-3n}\right) \cdot \log n$$

$$\sim \log 1 \cdot \log n = 0 \cdot \infty \quad \text{F.I.}$$

$$\log\left(\frac{n^3+1}{n^3-3n}\right) \sim \frac{n^3+1}{n^3-3n} - 1 = \frac{3n+1}{n^3-3} \sim \frac{3}{n^2}$$

$$\lim \log\left(\frac{n^3+1}{n^3 \ldots}\right) \cdot \log n$$

$$\lim_{n \to \infty} \log\left(\frac{n^3+1}{n^3-3n}\right) \cdot \log n$$

$$= \lim_{n \to \infty} 3 \frac{\log n}{n^2} = 0$$

$$\frac{3 \log n}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} \quad \text{poiche} \quad 3 \log n \leq \sqrt{n}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{converge.}$$