

2.3-PROBABILITA'-Poisson01

domenica 14 marzo 2021 19:10

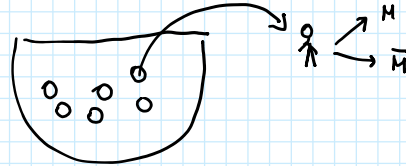
Uni Milano

Se la probabilità che un individuo sia allergico ad un certo vaccino è di 0,001, determina la probabilità che su 1000 individui almeno 2 siano allergici al vaccino.

$$\pi = 0,001$$

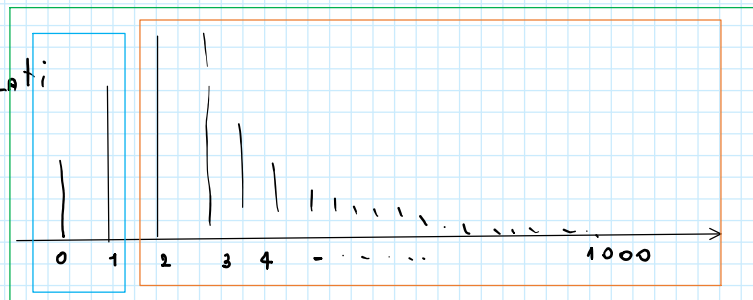
$$n = 1.000$$

$$1 - \pi = 0,999$$



$X = N.$ INDIVIDUI MALATI

$$P(X \geq 2)$$



$$P(2) + P(3) + P(4) + \dots + P(1000)$$

$$\binom{1000}{2} 0,001^2 \cdot 0,999^{998} + \binom{1000}{3} 0,001^3 \cdot 0,999^{997} + \dots + \binom{1000}{1000} 0,001^{1000} \cdot 0,999^0$$

$$\sum_{x=0}^{1000} P(x) = 1$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - (P(0) + P(1))$$

$$= 1 - \left(\binom{1000}{0} \cdot 0,001^0 \cdot 0,999^{1000} + \binom{1000}{1} \cdot 0,001^1 \cdot 0,999^{999} \right)$$

$$= 26,46\%$$

Se proviamo a mettere 1 individuo su 10.000 oppure su 100.000 il risultato non cambierebbe di molto!!!

$$P(X < 2) = 1 - \left(\binom{100.000}{0} \cdot 0,0001^0 \cdot 0,999^{100.000} + \binom{100.000}{1} \cdot 0,0001^1 \cdot 0,999^{99.999} \right)$$

$$= 26,42\%$$

Se la numerosità è alta e la probabilità è bassa si può utilizzare Poisson

$$\text{Bim}(m; \pi) : \begin{matrix} m \rightarrow \infty \\ \pi \rightarrow 0 \end{matrix} \rightarrow \text{Bim} \sim \text{Pois} \quad \lambda = m\pi$$

$$\lambda = 0,001 \cdot 1000 = 1$$

$$P(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\begin{aligned} P(x < 2) &= 1 - e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!} - e^{-1} \cdot \frac{1^1}{1!} = \\ &= 1 - 2 \cdot e^{-1} = 0,2642 = 26,42\% \end{aligned}$$

UTILIZZI TIPICI DELLA POISSON

La distribuzione di Poisson è in statistica una distribuzione di probabilità discreta che esprime la probabilità per il numero di eventi che si verificano successivamente e indipendentemente in una certa unità spazio-temporale, sapendo che mediamente se ne verificano un numero lambda.

T = Unità spazio-temporale

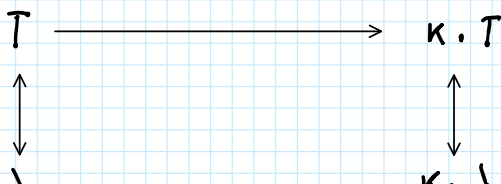
ESEMPLI:

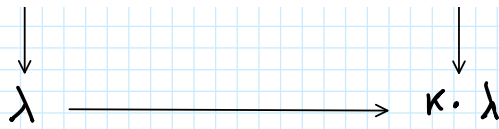
- In un'ora
- In un giorno
- In una mattinata
- In un kilometro
- In ogni processo produttivo

λ = (lambda) = Numero medio di volte in cui si verifica un certo evento nell'unità spazio-temporale

TRASFORMAZIONE DELL'UNITA' SPAZIO-TEMPORALE

Ogni volta che prendo in considerazione un multiplo (o un sotto-multiplo) dell'unità spazio-temporale, effettuo la stessa trasformazione anche su lambda





ESEMPIO:

In un call center chiamano mediamente otto persone all'ora.

$$T = 1h \longrightarrow \lambda = 8$$

1) In quattro ore chiamano mediamente $4 \cdot 8 = 32$ persone

$$T' = 4T = 4h \longrightarrow \lambda' = 4 \cdot \lambda = 4 \cdot 8 = 32$$

2) In mezz'ora chiamano mediamente $1/2 \cdot 8 = 4$ persone

$$T'' = \frac{1}{2} T = 0,5h \longrightarrow \lambda'' = \frac{1}{2} \cdot \lambda = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

3) In due giornate lavorative (una giornata lavorativa sono 8 ore) chiamano $2 \cdot 8 \cdot 8 = 128$ persone

$$\begin{aligned} T''' &= 2 \cdot 8 \cdot T = & \longrightarrow & \lambda''' = 2 \cdot 8 \cdot 8 = \\ &= 16h & & = 128 \end{aligned}$$

TESTI TIPI DELLA POISSON

Un gelataio vende mediamente in una mattina d'estate 35 gelati

In un negozio entrano in una giornata di otto ore 50 clienti.

Nel casello di Palazzolo sull'Oglio entrano 3 macchine al minuto

Esercizio UNIBRESCIA

Al magazzino di un'azienda arrivano mediamente 4,3 autoarticolati ogni 4 ore. Sia W la variabile casuale che descrive la probabilità che in 4 ore arrivino w autoarticolati.

- Che tipo di variabile è W ?
- Con quale valore atteso e quale varianza?
- Qual è la probabilità che w sia maggiore di 2?
- Qual è la probabilità che in otto ore lavorative arrivino dagli 8 ai 10

autoarticolati inclusi?

A) Che tipo di variabile è W?

W è una VC di tipo Poisson

B) Con quale valore atteso e quale varianza?

La media coincide con la varianza che coincide con il $\lambda=4,3$

$$\mu = \sigma^2 = \lambda = 4,3$$

C) Qual è la probabilità che w sia maggiore di 2?

$$P(W > 2) =$$

$$1 - [P(W=0) + P(W=1) + P(W=2)] =$$

$$1 - e^{-4,3} \cdot \frac{4,3^0}{0!} - e^{-4,3} \cdot \frac{4,3^1}{1!} - e^{-4,3} \cdot \frac{4,3^2}{2!}$$

$$1 - e^{-4,3} \cdot \left(1 + 4,3 + \frac{4,3^2}{2} \right) = 0,8026$$

D) Qual è la probabilità che in otto ore lavorative arrivino dagli 8 ai 10 autoarticolati inclusi?

W' = numero di autocarri che arrivano in 8 ore

$$\lambda' = 2\lambda = 8,6$$

$$P(8 \leq W' \leq 10) = P(W'=8) + P(W'=9) + P(W'=10)$$

$$= e^{-8,6} \cdot \left(\frac{8,6^8}{8!} + \frac{8,6^9}{9!} + \frac{8,6^{10}}{10!} \right)$$

$$= 0,3795$$

IL FATTORIALE CON LA CALCOLATRICE

