LA TEORIA IN SINTESI
LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

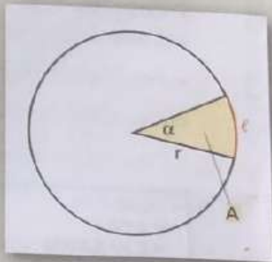
1. LA MISURA DEGLI ANGOLI

- Un angolo può essere misurato in **gradi** oppure in **radianti**.
Un grado è la 360^a parte dell'angolo giro.
Un radiante è l'angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.
Vale la proporzione $\alpha^\circ : \alpha_{rad} = 360^\circ : 2\pi$, che permette di passare da gradi a radianti e viceversa.

ESEMPIO: 30° equivale a $\frac{\pi}{6}$ radianti, perché:

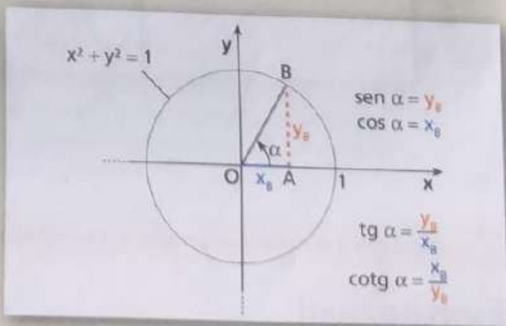
$$30^\circ : \alpha = 360^\circ : 2\pi \rightarrow \alpha = \frac{30^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}.$$

- Se in una circonferenza α è la misura in radianti di un angolo al centro e r la misura del raggio:
  - la **lunghezza dell'arco** è $l = \alpha r$;
  - l'**area del settore circolare** è $A = \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2} l r$.



2. 3. 4. 5. LE FUNZIONI SENO, COSENO, TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE, COSECANTE

- Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il suo lato termine e la circonferenza goniometrica. Si dice:
  - **seno di α** (sen α) il valore dell'ordinata di B;
  - **coseno di α** (cos α) il valore dell'ascissa di B;
  - **tangente di α** (tg α) il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa di B; è definita per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;
  - **cotangente di α** (cotg α) il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata di B; è definita per $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.



- **Relazioni fondamentali della goniometria**:

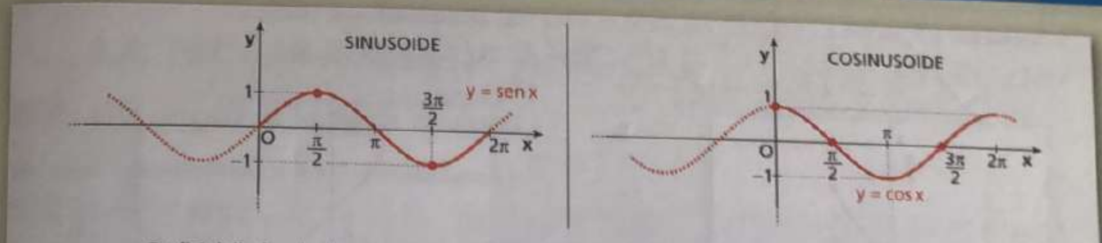
$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \text{ e } \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}.$$

- **Secante di α**

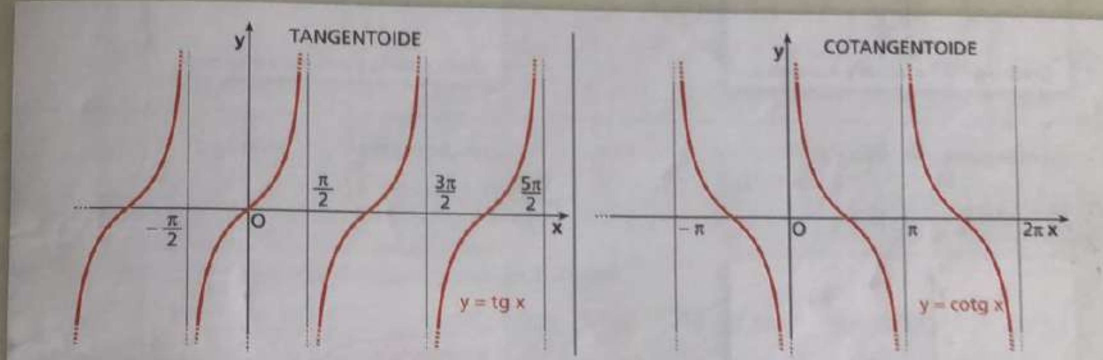
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \text{ con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

- **Cosecante di α**

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}, \text{ con } \alpha \neq 0 + k\pi.$$

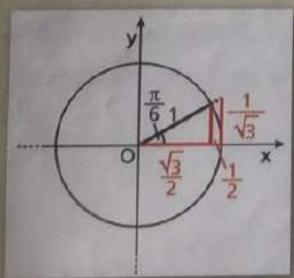


Grafici delle funzioni seno e coseno. Le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π.



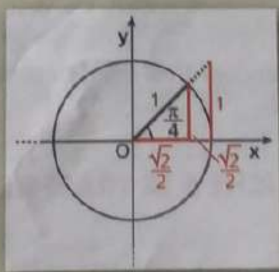
Grafici delle funzioni tangente e cotangente. Le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo π.

6. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI



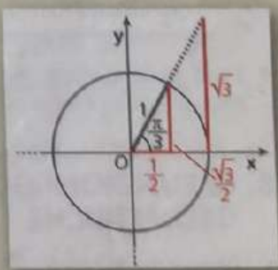
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.



$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

7. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

- Le **funzioni inverse** delle funzioni seno, coseno, tangente e cotangente sono, rispettivamente, le seguenti (con D indichiamo il dominio, con C il codominio):

- **arcoseno**: $y = \arcsen x$

  $D: [-1; 1]$; $C: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

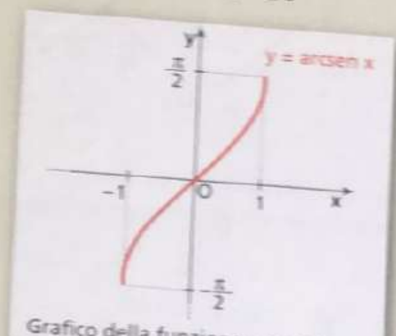


Grafico della funzione $y = \arcsen x$.

- **arcocoseno**: $y = \arccos x$

  $D: [-1; 1]$; $C: [0; \pi]$;

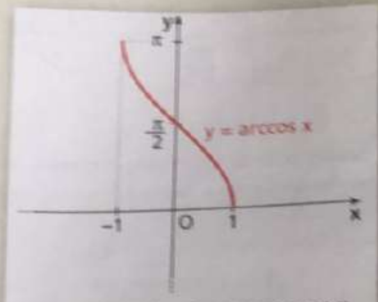


Grafico della funzione $y = \arccos x$.

- **arcotangente**: $y = \arctg x$

  $D: \mathbb{R}$; $C: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$;

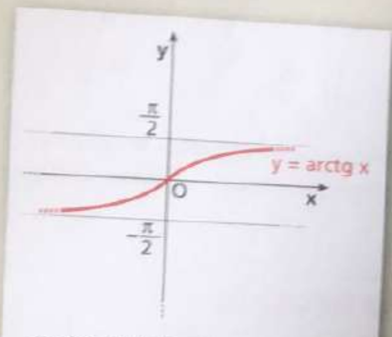


Grafico della funzione $y = \arctg x$.

- **arcocotangente**: $y = \text{arccotg}\, x$

  $D: \mathbb{R}$; $C:]0; \pi[$.

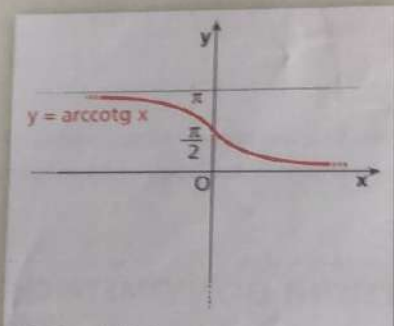


Grafico della funzione $y = \text{arccotg}\, x$.

■ I loro grafici si ottengono da quelli delle funzioni di cui sono le inverse, tracciando i simmetrici rispetto alla bise trice del primo e terzo quadrante.

8. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

■ Dai grafici delle funzioni goniometriche si possono ottenere i grafici di altre funzioni mediante **traslazioni**, **sir metrie**, **dilatazioni** e **contrazioni**.

■ **Funzioni sinusoidali**: sono funzioni del tipo

$$y = A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi), \quad y = A \cos(\omega x + \varphi),$$

con $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$.

■ Si dice:

- **ampiezza** della funzione sinusoidale il numero $|A|$;
- **pulsazione** il numero ω;
- **sfasamento** o **fase iniziale** il numero φ;
- **periodo** della funzione sinusoidale il numero $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

1. LA MISURA DEGLI ANGOLI

▶ Teoria a pag. 634

Gli angoli e la loro misura

Dai gradi sessagesimali ai gradi sessadecimali

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Esprimiamo $25° \, 32' \, 40''$ in forma sessadecimale.

Poiché $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$, scriviamo:

$$32' = \left(32 \cdot \frac{1}{60}\right)^{\circ}.$$

Poiché $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$, scriviamo:

$$40'' = \left(40 \cdot \frac{1}{3600}\right)^{\circ}.$$

Trasformiamo la misura:

$$25° \, 32' \, 40'' = 25° + \left(\frac{32}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{40}{3600}\right)^{\circ} =$$
$$= 25° + 0{,}5\bar{3}° + 0{,}0\bar{1}° \simeq 25{,}54°.$$

La trasformazione richiesta è la seguente:

$$25° \, 32' \, 40'' \simeq 25{,}54°.$$

Esprimi in forma sessadecimale le seguenti misure di angoli.

2 $0° \, 59' \, 59''$; $0° \, 30'$. [$1°$; $0{,}5°$]

3 $1° \, 59' \, 30''$; $2° \, 40''$. [$1{,}99°$; $2{,}01°$]

4 $20° \, 30'$; $60° \, 20'$. [$20{,}5°$; $60{,}3°$]

5 $15° \, 30' \, 30''$; $30° \, 30' \, 30''$. [$15{,}5°$; $30{,}5°$]

6 $44° \, 59' \, 32''$; $45° \, 59' \, 60''$. [$44{,}99°$; $46°$]

7 $92° \, 20' \, 36''$; $140° \, 26' \, 55''$. [$92{,}34°$; $140{,}45°$]

Dai gradi sessadecimali ai gradi sessagesimali

8 **ESERCIZIO GUIDA**

Trasformiamo $28{,}07°$ (forma sessadecimale) in gradi, primi e secondi.

Possiamo scrivere $28{,}07° = \boxed{28°} + 0{,}07°$. Trasformiamo $0{,}07°$ in primi, moltiplicando 0,07 per 60 (poiché $1° = 60'$):

$$0{,}07° = (0{,}07 \cdot 60)' = 4{,}2'.$$

Scriviamo $4{,}2' = \boxed{4'} + 0{,}2'$.

Trasformiamo $0{,}2'$ in secondi, moltiplicando 0,2 per 60 (poiché $1' = 60''$):

$$0{,}2' = (0{,}2 \cdot 60)'' = \boxed{12''}.$$

Pertanto:

$$28{,}07° = 28° \, 4' \, 12''.$$

Esprimi in gradi, primi e secondi le seguenti misure di angoli, espresse in forma sessadecimale (arrotondando eventualmente i secondi).

9 $2{,}234°$ [$2° \, 14' \, 2''$]

10 $22{,}52°$ [$22° \, 31' \, 12''$]

11 $120{,}360°$ [$120° \, 21' \, 36''$]

12 $1{,}567°$ [$1° \, 34' \, 1''$]

13 $90{,}05°$ [$90° \, 3'$]

14 $25{,}251°$ [$25° \, 15' \, 4''$]

15 $90{,}5°$ [$90° \, 30'$]

16 $60{,}46°$ [$60° \, 27' \, 36''$]

17 $100{,}252°$ [$100° \, 15' \, 7''$]

Le operazioni fra angoli espressi in gradi

18 **ESERCIZIO GUIDA**

Eseguiamo la seguente sottrazione:

$90° - 32° 46' 22''$.

Per poter eseguire la sottrazione, scriviamo 90° in termini di primi e secondi.

Poiché $1° = 60'$, possiamo scrivere:

$90° = 89° 60'$.

Poiché $1' = 60''$, possiamo scrivere:

$90° = 89° 59' 60''$.

Ora è possibile eseguire la sottrazione in colonna, fra gradi, primi e secondi:

$$\begin{array}{r} 89° 59' 60'' - \\ 32° 46' 22'' = \\ \hline 57° 13' 38'' \end{array}$$

Esegui le seguenti operazioni fra le misure di angoli.

19 $15° 32' 52'' + 2° 12' 8''$ [17° 45']

20 $185° 2' + 6° 59' 12''$ [192° 1' 12'']

21 $27° 2' 3'' + 42° 12' 56'' + 1° 2' 4''$ [70° 17' 3'']

22 $102° 50' 18'' + 3° 9' 42''$ [106°]

23 $180° - 28° 30' 58''$ [151° 29' 2'']

24 $270° - 120° 29' 32''$ [149° 30' 28'']

25 $360° - 322° 40' 50''$ [37° 19' 10'']

26 $90° - 82° 48' 32''$ [7° 11' 28'']

27 $26° - 1° 1' 1''$ [24° 58' 59'']

28 $18° 30' 15'' \cdot 2$ [37° 0' 30'']

Dai gradi sessagesimali ai radianti e viceversa

29 **COMPLETA** la seguente tabella scrivendo la misura mancante, in gradi o in radianti.

Gradi	90°	0°	60°	180°	135°	30°	120°	270°	300°	225°
Radianti	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$

Trasforma in radianti le misure dei seguenti angoli, espresse in gradi sessagesimali.

30 15°, 36°, 210°, 300°. $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{5}; \frac{7}{6}\pi; \frac{5}{3}\pi\right]$

31 16°, 27°, 102°, 315°. [0,28; 0,47; 1,78; 5,50]

32 25°, 35°, 72°, 155°. [0,44; 0,61; 1,26; 2,71]

33 121° 3′, 200° 36′, 15° 12′ 58″. [2,11; 3,50; 0,27]

Trasforma in gradi sessagesimali le misure dei seguenti angoli, espresse in radianti.

34 $\frac{4}{5}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{7}{9}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$. [144°; 75°; 140°; 300°]

35 $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{9}{5}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$. [38° 11′ 50″; 120°; 324°; 270°]

36 4π, 4, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$. [720°; 229° 11′; 143° 14′ 22″; 450°]

37 $\frac{3}{8}\pi$, 3,405, $\frac{5}{16}\pi$, 2,807. [67° 30′; 195° 5′ 32″; 56° 15′; 160° 49′ 45″]

38 **COMPLETA** la seguente tabella inserendo la misura mancante.

Gradi sessagesimali	22° 30′			31° 12′		18° 1′ 2″	
Radianti		$\frac{3}{8}\pi$			8		
Forma decimale			12,5°				120,34°

39 Un angolo α misura 0,725 radianti. Trova la misura del suo supplementare in radianti e in gradi. [138° 39′ 21″; 2,42]

In un triangolo rettangolo trova le misure in gradi degli angoli acuti α e β utilizzando la condizione indicata.

40 $\alpha = \frac{1}{3}\beta$ [$\alpha = 22° 30′$, $\beta = 67° 30′$]

41 $\alpha = \beta - 20°$ [$\alpha = 35°$, $\beta = 55°$]

42 α supera il doppio di β di 15°. [$\alpha = 65°$, $\beta = 25°$]

43 In un triangolo isoscele ciascun angolo alla base misura 27°. Trova la misura in radianti dell'angolo al vertice. [2,2]

44 Un angolo di un triangolo misura 32°, un secondo angolo è $\frac{2}{3}\pi$ radianti. Calcola la misura del terzo angolo in gradi e in radianti. [28°; 0,49]

45 Un triangolo ha un angolo doppio di un altro e il terzo angolo misura 24°. Trova la misura in radianti dei tre angoli del triangolo. [0,42; 0,91; 1,82]

46 Un triangolo ha gli angoli α, β, γ tali che $\alpha = \frac{1}{3}\beta$ e $\beta = \gamma$. Trova la misura in radianti degli angoli α, β, γ. $\left[\alpha = \frac{\pi}{7}; \beta = \gamma = \frac{3}{7}\pi\right]$

47 Un quadrilatero ha due angoli che misurano 148° e $\frac{7}{15}\pi$ e gli altri due sono uno i $\frac{3}{5}$ dell'altro. Scrivi le misure degli angoli del quadrilatero in gradi e in radianti. $\left[148°, 84°, 80°, 48°; \frac{37}{45}\pi, \frac{7}{15}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{4}{15}\pi\right]$

Trova la misura, in gradi o in radianti, di due angoli supplementari α e β, utilizzando la condizione indicata.

48 $\alpha - 3\beta = 27°$ [$\alpha = 141° 45′$, $\beta = 38° 15′$]

49 $\beta - 2\alpha = 80°$ [$\alpha = 33° 20′$, $\beta = 146° 40′$]

50 $\alpha = \beta + \frac{\pi}{3}$ $\left[\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{\pi}{3}\right]$

51 Calcola la misura, in gradi e in radianti, di un angolo al centro di una circonferenza il cui raggio è uguale a 5 cm e che sottende un arco lungo 23 cm. [263° 33′ 38″; 4,6]

52 Calcola la lunghezza di un arco di circonferenza, con il raggio lungo 7 cm, che sottende un angolo uguale a 4,2 radianti. [29,4 cm]

53 Due archi l_1 e l_2 di due circonferenze, che hanno i raggi r_1 e r_2 rispettivamente uguali a 2 cm e 3,5 cm, sottendono lo stesso angolo. Trova la misura di l_2, sapendo che l_1 misura 4,5 cm. [7,88 cm]

54 Trova l'area di un settore circolare individuato da un arco lungo 22 cm di una circonferenza che ha il raggio lungo 5,2 cm e determina la misura in gradi dell'angolo sotteso dall'arco. [57,2 cm^2; 242° 21′ 40″]

55 Due settori circolari appartengono allo stesso cerchio e hanno area uguale a 12 cm^2 e 15,4 cm^2. Trova le lunghezze degli archi da essi determinati, sapendo che il primo sottende un angolo di 1,5 radianti. [6 cm; 7,7 cm]

56 Un settore circolare ha l'angolo al centro che misura 96° e l'area uguale a 60π. Determina la misura del raggio della circonferenza e dell'arco che è definito dal settore. [15; 8π]

57 Un settore circolare ha area uguale a 12 e perimetro 14. Quanto misurano il raggio e l'angolo al centro corrispondente? $\left[3, \frac{8}{3}\text{ rad}; 4, \frac{3}{2}\text{ rad}\right]$

58 **VERO O FALSO?**

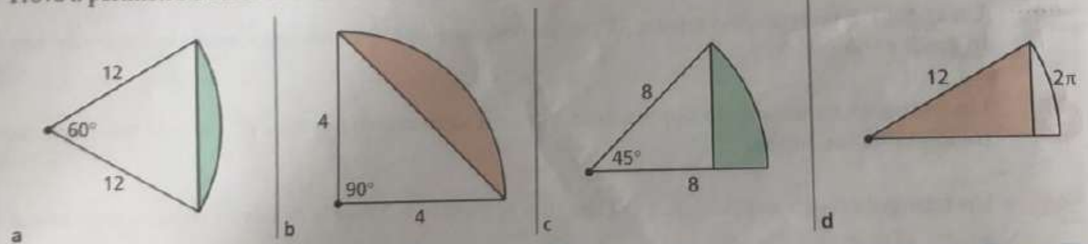
a) Se $\alpha = \frac{9}{4}\pi$, allora $\alpha = 45°$. V F

b) Se $\alpha = 300°$, allora $\alpha = \frac{5}{3}\pi$. V F

c) La misura l di un arco di circonferenza di raggio r che corrisponde a un angolo al centro di α radianti è $l = \frac{1}{2}\alpha r$. V F

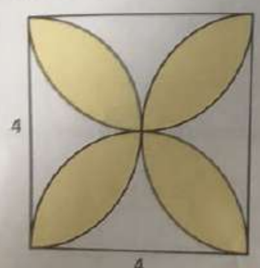
d) L'arco l di una circonferenza di raggio 5 cm, che sottende un angolo $\alpha = 32°$, è lungo $l = 32 \cdot 5 = 160$ cm. V F

59 Trova il perimetro e l'area delle zone colorate.



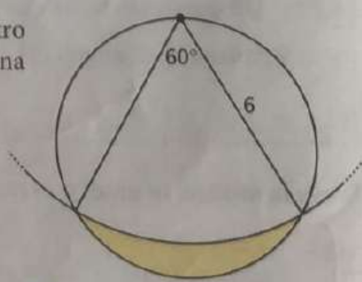
[a) $12 + 4\pi$, $24\pi - 36\sqrt{3}$; b) $2\pi + 4\sqrt{2}$, $4\pi - 8$; c) $2\pi + 8$, $8\pi - 16$; d) $18 + 6\sqrt{3}$, $18\sqrt{3}$]

60 Quanto vale l'area della zona colorata?



[$8(\pi - 2)$]

61 Trova perimetro e area della zona colorata.



$\left[\frac{2}{3}\pi(3 + 2\sqrt{3}); 2(3\sqrt{3} - \pi)\right]$