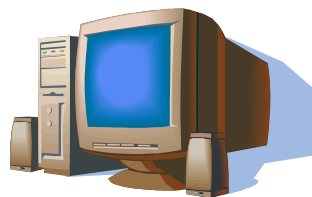
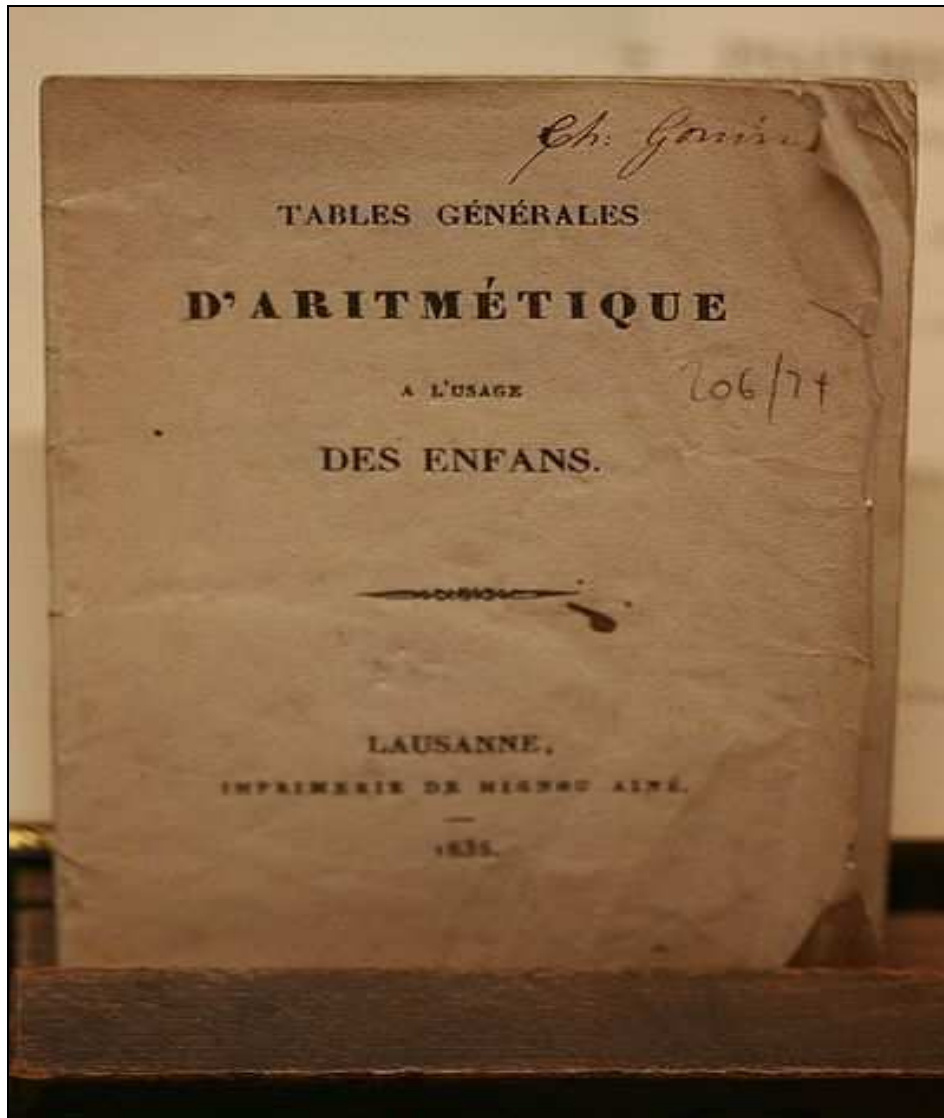


Dispense di Matematica per il primo anno
dell'Istituto I.S.I.S. " Gaetano Filangieri " di Frattamaggiore



Per l'esercitazioni on-line visita le pagine :

- www.chihapauradellamatematica.org
- www.matematicamente.it
- www.edurete.org/pd/sele_art.asp?id=2756
- www.pernigo.com/math (*prove invalsi*)



A cura della prof.ssa Maria Teresa Saviano

Indice degli Argomenti:

∞ 1- INSIEMI NUMERICI

1.	NUMERI NATURALI.....	pag.	3
	Esercizi	pag	9
2.	NUMERI INTERI RELATIVI.....	pag	13
	Esercizi	pag	16
3.	FRAZIONI E NUMERI RAZIONALI.....	pag	21
	Esercizi	pag	31
4.	NUMERI REALI ED IRRAZIONALI (CENNI).....	pag	41
5.	I SISTEMI DI NUMERAZIONE.....	pag	41
	Esercizi	pag	42

∞ 2 - CALCOLO LETTERALE

6.	ESPRESSIONI LETTERALI E VALORI NUMERICI.....	pag.	43
	Esercizi	pag.	45
7.	L'INSIEME DEI MONOMI.....	pag.	48
	Esercizi	pag.	53
8.	POLINOMI.....	pag.	56
	Esercizi	pag.	67
9.	EQUAZIONI NUMERICHE INTERE	pag.	74
	Esercizi	pag.	80
10.	SCOMPOSIZIONI DEI POLINOMI	pag.	84
	Esercizi	pag.	92

∞ 3- FRAZIONI ALGEBRICHE

11.	pag.	
	Esercizi	pag.	
12.	pag.	
	Esercizi	pag.	
13.	pag.	
	Esercizi	pag.	
14.	pag.	
	Esercizi	pag.	
15.	pag.	
	Esercizi	pag.	



1. NUMERI NATURALI(\mathbb{N})



1.1 L'origine dei numeri

L'origine del sistema dei numeri naturali si perde nella notte dei tempi. Non abbiamo documenti sufficienti per capire come l'uomo li abbia costruiti o scoperti; è possibile che il nostro sistema di numerazione sia nato contemporaneamente al linguaggio stesso della specie umana.

Sono stati ritrovati tronchi fossili risalenti a più di trentamila anni fa, recanti delle incisioni a distanza regolare. In particolare, è stato ritrovato un osso di babuino, nel Congo Belga che riporta delle tacche disposte in modo tale da farci pensare che rappresentino dei numeri o dei calcoli. L'osso risale a un periodo tra il 20.000 a.C. e il 18.000 a.C. Possiamo immaginare che i pastori per contare i capi del proprio gregge, facessero delle tacche su dei bastoni mano a mano che le pecore entravano nel recinto una alla volta: una tacca per ogni pecora.

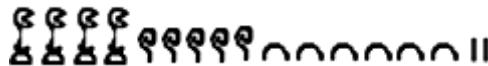
Tuttavia, questo metodo di associazione uno ad uno (una tacca per una pecora) non è efficace per greggi, o oggetti da contare, di grandi **dimensioni**. Si immagini, per esempio, la difficoltà di tracciare cinquecento tacche su un bastone. E' possibile allora che per rappresentare numeri grandi si siano cominciati a usare simboli specifici che richiamassero alla mente i numeri grandi e che contemporaneamente siano state fissate alcune regole per associare questi simboli.

Sappiamo per certo che circa 6000 anni fa gli antichi Egizi scrivevano, incidendo sulla pietra, i numeri utilizzando geroglifici per le potenze di 10.

1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1

Le potenze del 10 nella scrittura degli antichi Egizi

Ripetendo questi simboli è possibile scrivere, ad esempio, il numero 4562 :



I primi numeri che abbiamo usato sin da bambini per contare gli oggetti o le persone si chiamano numeri **Naturali** (\mathbb{N}) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13...

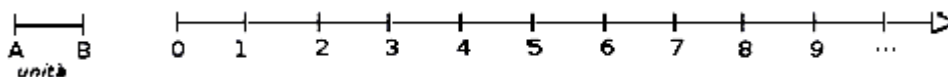
Cosa hanno in comune le dita di una mano, con 5 mele, 5 penne, 5 sedie...? Evidentemente il numero 5. Una caratteristica cioè che è comune a tutti gli insiemi formati da 5 oggetti. Questa caratteristica può essere vista come un oggetto a se stante, un oggetto astratto di tipo matematico. Ma i numeri naturali non servono solo per indicare quanti oggetti ci sono (aspetto cardinale del numero), vengono usati anche per rappresentare l'ordine con cui si presentano gli oggetti,(aspetto ordinale),l'ordine per esempio con cui i corridori arrivano al traguardo: primo, secondo, terzo...

I numeri naturali possono essere rappresentati su una semiretta : si identifica il numero 0 con l'origine della semiretta, come verso di percorrenza si prende quello da sinistra verso destra , e come unità di misura un segmento AB. Si riporta questa unità di misura più volte partendo dall'origine e a ogni passo si va al numero successivo.

I numeri naturali sulla semiretta: l'origine si fa coincidere con il numero 0, si riporta il segmento AB che fa da unità di misura e a ogni passaggio si aumenta di 1.

Ogni numero naturale si costruisce a partire dal numero 0 e passando di volta in volta al numero successivo: 1 è il successore di 0, 2 è il successore di 1, 3 è il successore di 2,

etc. Ogni numero naturale ha il successore e ogni numero, a eccezione di 0, ha il precedente. L'insieme \mathbb{N} ha 0 come elemento minimo e non ha un elemento massimo. I numeri rappresentati sulla retta sono sempre più grandi man mano che si procede da sinistra verso destra.



Ogni numero è maggiore di tutti i suoi precedenti, quelli che stanno alla sua sinistra, e minore di tutti i suoi successivi, quelli che stanno alla sua destra. Tra i numeri naturali esiste quindi una relazione d'ordine, che si rappresenta con il simbolo di disuguaglianza \leq o disuguaglianza stretta $<$. Grazie a questo ordinamento, è sempre possibile confrontare due numeri naturali qualsiasi n, m , ottenendo uno solo dei seguenti tre casi: **legge di tricotomia** : $n > m$, $n < m$, $n = m$



2.1 Addizione e moltiplicazione di numeri naturali

Tra i numeri naturali è definita l'operazione di addizione come segue:

DEF.: Dati due numeri naturali n e m , detti **addendi**, l'operazione di addizione associa ai due addendi un terzo numero s , detto **somma**, che si ottiene partendo da n e procedendo verso i successivi di n tante volte quante indica il secondo addendo m . **Si scrive $n + m = s$.**

Ad esempio se vogliamo eseguire la somma $3 + 5$ dobbiamo partire da 3 e contare 5 numeri successivi:



L'operazione di moltiplicazione si indica con diversi simboli:

$$p = n \times m \text{ oppure } p = n \cdot m \text{ oppure } p = n * m$$

Per eseguire la moltiplicazione $4 \cdot 2$ dobbiamo addizionare $2+2+2+2$, otteniamo 8.

Le operazioni di addizione e moltiplicazione si dicono operazioni interne all'insieme dei numeri naturali, esse infatti danno sempre come risultato un numero naturale.



1.3 Sottrazione e divisione di numeri naturali

Diamo la seguente definizione.

DEF.: Dati due numeri naturali n e m , il primo detto **minuendo** e il secondo **sottraendo**, si dice **differenza** il numero naturale d , se esiste, che aggiunto ad m dà come somma n .

$$\text{Si scrive } n - m = d.$$

Per esempio, $7 - 5 = 2$ perché $5 + 2 = 7$.

Ritornando alla rappresentazione dei numeri naturali sulla semiretta orientata, la differenza tra i numeri 7 e 5 si può trovare partendo da 7 e procedendo a ritroso di 5 posizioni.



Osservazioni: Non esiste, invece, la differenza tra 5 e 7, in quanto nessun numero naturale aggiunto a 7 può dare 5.

Esercizio - Completa: " Diventa allora evidente perché non è possibile trovare la differenza tra 5 e 7", infatti

Osservazioni: Si può osservare allora che in \mathbb{N} la sottrazione $a - b$ è possibile solo se $b \leq a$

DEF.: Dati due numeri naturali n e m , con $m \neq 0$, il primo detto **dividendo** e il secondo **divisore**, si dice **quoziente** esatto un numero naturale q , se esiste, che moltiplicato per m dà come prodotto n .

$$\text{Si scrive } n:m=q.$$

Se il quoziente esiste, il numero m si dice **divisore di n** , oppure n è **divisibile per m** .

DEF.: Un numero naturale a si dice **multiplo** di un numero naturale b se esiste un numero n che moltiplicato per b dà a , cioè $a = n \cdot b$.

Esempi $12:3=4$ perché $3 \cdot 4=12$

Quindi, 12 è divisibile per 3; 3 è un divisore di 12; 12 è un multiplo di 3.

- 20 è divisibile per 4 perché $20:4=5$.
- 7 è divisore di 35 perché $35:7=5$.
- 6 è multiplo di 3 perché $6=2 \cdot 3$.
- 5 non è multiplo di 3, non esiste alcun numero naturale che moltiplicato per 3 dà 5.

Osservazioni: In \mathbb{N} la divisione tra due numeri a e b è possibile solo se a è multiplo di b .

Esercizio : Inserisci il numero naturale mancante, se esiste:

a) $7 - \dots = 1$ $3 - 3 = \dots$ $5 - 6 = \dots$

b) $3 - \dots = 9$ $15 : 5 = \dots$ $18 : \dots = 3$

c) $\dots : 4 = 5$ $12 : 9 = \dots$ $36 \cdot \dots = 9$

Come hai potuto notare dagli esercizi precedenti la divisione tra due numeri naturali non è sempre possibile. Con i numeri naturali però è sempre possibile eseguire la divisione con il resto.

DEF.: Dati due numeri naturali n e m , con $m \neq 0$, si dice **quoziente** tra n e m , il più grande numero naturale q che moltiplicato per m dà un numero minore o uguale a n . Si dice **resto** della divisione tra n e m la differenza r tra il dividendo n e il prodotto tra il **divisore** m e il **quoziente** q .

$$\text{In simboli } r = n - m \times q \text{ o anche } n = m \times q + r$$

Esempi : Nella divisione con resto tra 25 e 7 si ha quoziente 3 (infatti $7 \times 3 = 21$ mentre $7 \times 4 = 28$ supera il dividendo) e resto 4 (infatti $25 - 21 = 4$). Pertanto si può scrivere $25 = 7 \times 3 + 4$.

• $0 : 2 = 0$

• $1 : 2 = 0$ con resto 1

• $5 : 2 = 2$ con resto 1

Osservazioni: Nella definizione di quoziente abbiamo sempre richiesto che il divisore sia diverso da zero. In effetti se il divisore è 0 non c'è nessun numero che moltiplicato per 0 ci possa dare un dividendo diverso da zero.

Per esempio, nella divisione $5 : 0$ dobbiamo ottenere un numero che moltiplicato per 0 dà 5; ciò non è possibile in quanto qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0.

Invece nella divisione $0 : 0$ un qualsiasi numero è adatto come quoziente, infatti qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0 come prodotto.

Nel linguaggio matematico si dice che una divisione del tipo $n : 0$, con $n \neq 0$, è impossibile; mentre la divisione $0 : 0$ diciamo che è indeterminata.

DEF.: Dati due numeri naturali n e m , con $m \neq 0$, la divisione intera n diviso m è l'operazione che dà il più grande numero naturale q (il quoziente) per il quale si ha $q \cdot m \leq n$.

Osservazioni: Non è possibile eseguire la divisione intera per 0.

• $3 \text{ div } 0 =$ non si può fare ,

• invece si può fare : $0 \text{ div } 5 = 0$,

• mentre $9 \text{ div } 2 = 4$, $3 \text{ div } 5 = 0$ (ovviamente è la divisione tra interi)

Esempi

Se è vero che $p = n \times m$ quali affermazioni sono vere?

a) p è multiplo di n V F

b) p è multiplo di m V F

c) m è multiplo di p V F

d) m è multiplo di n V F

e) p è divisibile per m V F

f) m è divisibile per n V F

g) p è divisore di m V F

h) n è divisore di m V F

Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) 6 è un divisore di 3 V F

b) 3 è un divisore di 12 V F

c) 8 è un multiplo di 2 V F

d) 5 è divisibile per 10 V F

DEF.: Un numero $p > 1$ si dice **primo** se è divisibile solo per se stesso e per l'unità. Un numero naturale maggiore di 1 si dice **composto** se non è primo.



1.4 Potenza di numeri naturali

La potenza di un numero naturale è una moltiplicazione particolare con tutti i fattori uguali.

DEF.: Dati due numeri naturali a e b , con $b > 1$ il primo detto base, il secondo esponente, la potenza di a con esponente n è il numero p che si ottiene moltiplicando fra loro n fattori tutti uguali ad a .
Si scrive $a^n = p$ e si legge "a elevato a n uguale a p".

Per esempio $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

Alla definizione precedente vanno aggiunti i seguenti casi particolari che completano la definizione:

$$a^1 = a, \quad a^0 = 1, \quad \text{se } a \neq 0, \quad 0^0 \text{ non ha significato}$$

Proprietà delle potenze

I $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$, infatti $a^k \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots a)}_{k \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots a)}_{m \text{ volte}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a}_{k+m \text{ volte}} = a^{k+m}$

II $a^k : a^m = a^{k-m}$, infatti $a^k : a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a)}_{k \text{ volte}} : \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots a)}_{m \text{ volte}} = \underbrace{(a : a)}_{1 \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a : a)}_{1 \text{ volte}} \dots \underbrace{(a : a)}_{1 \text{ volte}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{k-m \text{ volte}} = a^{k-m}$

III $(a^k)^m = a^{k \cdot m}$, infatti $(a^k)^m = \underbrace{a^k \cdot a^k \dots a^k}_{m \text{ volte}} = \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_{k \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_{k \text{ volte}} \dots \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_{k \text{ volte}} = a^{k \cdot m}$

IV $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, infatti $(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \dots (a \cdot b)}_{n \text{ volte}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \dots b)}_{n \text{ volte}} = a^n \cdot b^n$

V $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ infatti.....

Esempi

Inserisci i numeri mancanti:

a) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 3^{-+--+} = 3^{-}$

b) $3^4 : 3^2 = 3^{- -} = 3^{-}$

c) $(3 : 7)^5 = 3^{-} : 7^{-}$

d) $6^3 : 5^3 = (6 : 5)^{-}$

e) $7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = (7 \cdot 5 \cdot 2)^{-}$

f) $(2^6)^2 = 2^{(+ \dots +)} = 2^{-}$

g) $(18^6) : (9^6) = (\dots)^{-} = 2^{-}$

h) $(5^6 \cdot 5^4)^2 : [(5^2)^3]^6 = \dots = 5^{-}$

Calcola applicando le proprietà delle potenze:

a) $2^5 \cdot 2^3 : 2^2 \cdot 3^6$

b) $(5^2)^3 : 5^3 \cdot 5$

c) $((2^1)^4 \cdot 3^4)^2 : 6^5 \cdot 6^0$

$[6^6]$

$[5^4]$

$[6^3]$

Proprietà delle operazioni

Proprietà commutativa : $a + b = b + a$;

$a \cdot b = b \cdot a$;

Proprietà associativa : $(a + b) + c = a + (b + c)$;

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

Proprietà distributiva : $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

* **Elemento neutro** : Una operazione ha un elemento **neutro** se composto con qualsiasi altro numero lo lascia invariato, sia quando il numero è a destra, sia quando è a sinistra.

$$a + 0 = 0 + a = a; \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

* **LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO**. Il prodotto di due o più numeri naturali si annulla se almeno uno dei fattori è nullo. $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oppure $b = 0$

Esempi

Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o false indicando la proprietà utilizzata :

a) $80 - 52 + 36 = (20 - 13 + 9)$ proprietà _____ V F

b) $33 : 1 = 11 : 33$ proprietà _____ V F

c) $108 - 72 : 9 = (108 - 72) : 9$ _____ V F

d) $8 - 4 = 8 + 4$ _____ V F

e) $35 \cdot 10 = 10 \cdot 35$ _____ V F

f) $9 \cdot (2 + 3) = 9 \cdot 3 + 9 \cdot 2$ _____ V F

g) $(28 - 7) : 7 = 28 : 7 - 7 : 7$ V F

h) $(8 \cdot 1) : 2 = 8 : 2$ V F

i) $(8 - 2) + 3 = 8 - (2 + 3)$ V F

j) $(13 + 11) + 4 = 13 + (11 + 4)$ V F

k) $0 + (100 + 50) = 100 + 50$ V F

l) $2^3 + 5^3 = (2 + 5)^3$ V F

Calcola:

m) $2^2 \cdot (2^3 + 5^2)$

n) $[(3^6 : 3^4)^2 \cdot 3^2]^2$

o) $4^4 \cdot (3^4 + 4^2)$

p) $3^4 \cdot (3^4 + 4^2 - 2^2)^0 : 3^3 + 0 \cdot 100$



1.5 Criteri di divisibilità

Un numero è :

- * **divisibile per 2**, se e solo se la sua ultima cifra è un numero pari, cioè è 0, 2, 4, 6, 8.
- * **divisibile per 3** se e solo se la somma delle cifre che lo compongono è divisibile per 3.
- * **divisibile per 5** se la sua ultima cifra è 0 o 5.
- * **divisibile per 7** se la differenza (in valore assoluto) fra il numero ottenuto togliendo la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità è 7 o un multiplo di 7.
- * **divisibile per 11** se la differenza, in valore assoluto, fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è 0 o 11 o multiplo di 11.

Scomporre in fattori primi - Possiamo pensare di scrivere un numero naturale qualsiasi come prodotto di altri numeri. Scomporre in fattori un numero significa scriverlo come prodotto di altri numeri naturali.

Esempio

Scomporre in fattori primi il numero 630.

630	2	630 è divisibile per 2 perché l'ultima cifra è pari
315	3	315 è divisibile per 3, la somma delle sue cifre è 9 divisibile per 3
105	3	105 è divisibile per 3, la somma delle sue cifre è 6 divisibile per 3
35	5	35 è divisibile per 5 perché l'ultima cifra è 5
7	7	
1		$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$



1.6 Massimo comune divisore e Minimo comune multiplo

DEF.: Il massimo comune divisore di numeri naturali a e b, si indica con $MCD(a,b)$, è il più grande tra tutti i divisori comuni ad a e b.

■ Calcolare il M.C.M.(60.48.36)

Scomponendo in fattori i numeri si ha : $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $48 = 2^4 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$
 Tutti i fattori comuni, presi una sola volta con l'esponente più piccolo con cui compaiono : 2^2 e 3
 Il M.C.M. è $2^2 \cdot 3 = 12$

DEF.: Il minimo comune multiplo di due numeri naturali a e b, si indica con $mcm(a,b)$, è il più piccolo tra tutti i multipli di a e di b.

Esempi

■ Calcolare il m.c.m.(60.48.36)

Scomponendo in fattori i numeri si ha : $20 = 2^2 \cdot 5$, $24 = 2^3 \cdot 3$, $450 = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2$
 Tutti i fattori comuni e non, presi una sola volta con l'esponente più grande con cui compaiono : 5, 2^4 e 3^2
 Il m.c.m. è $5 \cdot 2^4 \cdot 3^2 = 720$

■ Calcolare il m.c.m.(20, 24, 450)

Scomponendo in fattori i numeri si ha : $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $48 = 2^4 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$
 Tutti i fattori comuni e non, presi una sola volta con l'esponente più grande con cui compaiono : 5, 2^3 e 3^2
 Il m.c.m. è $5 \cdot 2^3 \cdot 3^2 = 1800$



1.7 Espressioni numeriche

Un'espressione aritmetica è una successione di operazioni da eseguire su più numeri.

Regole

- * Se un'espressione contiene solo addizioni, le operazioni si possono eseguire in qualsiasi ordine, e ciò grazie alla proprietà associativa dell'addizione;
- * Se un'espressione contiene solo moltiplicazioni, le operazioni si possono eseguire in qualsiasi ordine, anche in questo caso grazie alla proprietà associativa della moltiplicazione;
- * Se un'espressione, senza parentesi, contiene più sottrazioni, si deve procedere eseguendole nel l'ordine in cui sono scritte, la sottrazione infatti non gode né della proprietà associativa né di quella commutativa ;

* Se un'espressione senza parentesi contiene solo addizioni e sottrazioni, le operazioni si devono eseguire nell'ordine con cui sono scritte.

* Se un'espressione senza parentesi contiene solo divisioni, le operazioni si devono eseguire nell'ordine con cui sono scritte;

* Se un'espressione senza parentesi contiene addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni e potenze, si eseguono prima le potenze, poi moltiplicazioni e divisioni, rispettando l'ordine con cui sono scritte, e poi addizioni e sottrazioni, rispettando l'ordine;

* Se l'espressione contiene una coppia di parentesi si devono eseguire prima le operazioni racchiuse nelle parentesi, rispettando le regole precedenti; si eliminano poi le parentesi e si ottiene un'espressione senza parentesi;

* Se l'espressione contiene più ordini di parentesi, si eseguono per prima le operazioni racchiuse nelle parentesi tonde, rispettando le regole precedenti, si eliminano le parentesi tonde e si procede con le operazioni racchiuse nelle parentesi quadre. Dopo aver eliminato le parentesi quadre, si eseguono le operazioni nelle parentesi graffe. Si ottiene così un'espressione senza parentesi.

Schema riepilogativo della successione delle operazioni per svolgere correttamente una espressione numerica. L'espressione viene risolta in 5 trasformazioni successive:

Esempi :

$$[[15 - (5 \cdot 2 - 4)] \cdot 2] : (30 : 15 + 1) - [[25 \cdot 4] : 10 - (11 - 2)]$$

1-

$$[+3 - (10 - 5 + 25)] \cdot [-16 + 5 - (-2 - 14)] : (9 + 6)$$

2-

$$(2 + 3)^2 : 5 + 5^3 - 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

3-

potenza	potenza
potenza	prodotto
divisione	somma
somma	
R = 70	

4- Completa

$$(18 - 3 \cdot 2) : (16 - 3 \cdot 4) - (2 : 2 + 2)$$

$$[6 \cdot (2 \cdot 4 - 2 \cdot 3) - 6] + [3 \cdot (21 : 7 - 2) \cdot [(6 \cdot 5) : 10] - 3 \cdot 2]$$



NATURALI

1 Rispondi alle seguenti domande

- a) Esiste il numero naturale che aggiunto a 3 dà come somma 6?
 b) Esiste il numero naturale che aggiunto a 12 dà come somma 7?
 c) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 4 dà come prodotto 12?
 d) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 5 dà come prodotto 11?

2 Inserisci il numero naturale mancante, se esiste:

- a) $8 - \dots = 1$ $5 - 3 = \dots$ $6 - 9 = \dots$
 b) $6 - \dots = 1$ $25 : 5 = \dots$ $81 : \dots = 3$
 c) $\dots : 5 = 10$ $12 : 3 = \dots$ $36 + \dots = 7$
 d) $\dots + 2 = 5$ $10 + \dots = 6$ $36 + \dots = 9$

1 Rispondi alle seguenti domande

- a) Esiste il numero naturale che aggiunto a 3 dà come somma 6?
 b) Esiste il numero naturale che aggiunto a 12 dà come somma 7?
 c) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 4 dà come prodotto 12?
 d) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 5 dà come prodotto 11?

2 Inserisci il numero naturale mancante, se esiste:

- a) $8 - \dots = 1$ $5 - 3 = \dots$ $6 - 9 = \dots$
 b) $6 - \dots = 1$ $25 : 5 = \dots$ $81 : \dots = 3$
 c) $\dots : 5 = 10$ $12 : 3 = \dots$ $36 + \dots = 7$
 d) $\dots + 2 = 5$ $10 + \dots = 6$ $36 + \dots = 9$

3 Vero/falso?

- | | | | | | |
|------------|---|---|------------|---|---|
| a) $5:0=5$ | V | F | e) $0:1=0$ | V | F |
| b) $0:5=0$ | V | F | f) $0:0=0$ | V | F |
| c) $5:5=0$ | V | F | g) $1:1=1$ | V | F |
| d) $1:0=1$ | V | F | h) $1:5=1$ | V | F |

4 Se è vero che $15 = 5 \times 3$ quali affermazioni sono vere?

- | | | | | | |
|-----------------------|---|---|--------------------------|---|---|
| a) 15 è multiplo di 5 | V | F | e) 15 è divisibile per 3 | V | F |
| b) 15 è multiplo di 3 | V | F | f) 3 è divisibile per 5 | V | F |
| c) 3 è multiplo di 15 | V | F | g) 15 è divisore di 5 | V | F |
| d) 3 è multiplo di 5 | V | F | h) 5 è divisore di 3 | V | F |

5 Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- | | | | | | |
|--------------------------|---|---|--------------------------|---|---|
| a) 6 è un divisore di 3 | V | F | c) 8 è un multiplo di 2 | V | F |
| b) 3 è un divisore di 12 | V | F | d) 5 è divisibile per 10 | V | F |

6 Completa le tabelle :

a	Successivo di a	Precedente di a
2	3	1
7		
	5	
		13
	10	
		100
		0
0		

a	b	a - b	b - a	a : b	b : a
4	32				
35	7				
1	6				
2	3				
10	1				
3	9				
25	5				
3	15				

a	b	a > b
4	32	
10	3	
12	13	
5	5	
3	0	

a	b	a è multiplo di b	b è multiplo di a
4	32		
35	7		
1	6		
2	3		
10	1		

0	1	
---	---	--

3	9		
---	---	--	--

7 Inserisci i numeri mancanti:

- a) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 3^{-1} \cdot 3^{\dots} = 3^{\dots}$
 b) $3^4 : 3^2 = 3^{\dots} = 3^{\dots}$
 c) $(3 : 7)^5 = 3^{\dots} : 7^{\dots}$
 d) $6^3 : 5^3 = (6 : 5)^{\dots}$

- e) $7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = (7 \cdot 5 \cdot 2)^{\dots}$
 f) $(2^4)^2 = 2^{(\dots \cdot \dots)} = 2^{\dots}$
 g) $(18^6) : (9^6) = (\dots)^{\dots} = 2^{\dots}$
 h) $(5^6 \cdot 5^4)^2 : [(5^2)^3]^6 = \dots = 5^{\dots}$

somma 6?
 e somma 7?
 come prodotto 12?
 come prodotto 11?

8 Calcola applicando le proprietà delle potenze:

- a) $2^5 \cdot 2^3 : 2^2 \cdot 3^6$ $[6^6]$
 b) $(5^2)^3 : 5^3 \cdot 5$ $[5^4]$
 c) $((2^1)^4 \cdot 3^4)^2 : 6^5 \cdot 6^0$ $[6^3]$

9 Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o false indicando la proprietà utilizzata:

- | | | | |
|----------------------------------------------|-----------------|---|---|
| a) $80 - 52 + 36 = (20 - 13 + 9) \cdot 4$ | proprietà | V | F |
| b) $33 : 11 = 11 : 33$ | proprietà | V | F |
| c) $108 - 72 : 9 = (108 - 72) : 9$ | | V | F |
| d) $8 - 4 = 8 + 4$ | | V | F |
| e) $35 \cdot 10 = 10 \cdot 35$ | | V | F |
| f) $9 \cdot (2 + 3) = 9 \cdot 3 + 9 \cdot 2$ | | V | F |
| g) $(28 - 7) : 7 = 28 : 7 - 7 : 7$ | | V | F |
| h) $(8 \cdot 1) : 2 = 8 : 2$ | | V | F |
| i) $(8 - 2) + 3 = 8 - (2 + 3)$ | | V | F |
| j) $(13 + 11) + 4 = 13 + (11 + 4)$ | | V | F |
| k) $0 + (100 + 50) = 100 + 50$ | | V | F |
| l) $2^3 + 5^3 = (2 + 5)^3$ | | V | F |

10 Calcola:

- m) $2^2(2^3 + 5^2)$ o) $4^4(3^4 + 4^2)$
 n) $[(3^5 \cdot 3^4)^2 \cdot 3^2]^6$ p) $3^4(3^4 + 4^2 - 2^2)^0 : 3^3 + 0 \cdot 100$

11 Data la seguente operazione tra i numeri naturali $a \circ b = 2 \cdot a + 3 \cdot b$ verifica se è

- a) commutativa, cioè se $a \circ b = b \circ a$
 b) associativa, cioè se $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
 c) 0 è elemento neutro

12 Completa

- 1236 finisce per 6 quindi è divisibile per
- 109230 finisce per 0 quindi è divisibile per
- 10923 finisce per 3 quindi non è divisibile per
- 2221 finisce per 1 quindi non è divisibile per
- 1230 finisce per 0 quindi è divisibile per
- 59235 finisce per 5 quindi è divisibile per
- 109253 finisce per 3 quindi non è divisibile per
- 5556 finisce per 6 quindi non è divisibile per
- 252 è divisibile per ..., infatti $|25 - 2 \cdot 2| = 21$ è multiplo di ...
- 49 è divisibile per ..., infatti $|4 - 2 \cdot 9| = 14$ è multiplo di ...
- 31 non è divisibile per ..., infatti $|3 - 2 \cdot 1| = 1$ non è multiplo di ...
- 887 non è divisibile per ..., infatti $|88 - 2 \cdot 7| = 74$ non è divisibile per ...

13 Per quali numeri sono divisibili seguenti numeri? Segnali con una crocetta

- a) 1320 è divisibile per 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
 b) 2344 è divisibile per 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
 c) 84 è divisibile per 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
 d) 1255 è divisibile per 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11

14 I numeri sotto elencati sono scritti come prodotto di altri numeri: sottolinea le scritture in cui ciascun numero è scomposto in fattori primi.

- a) $68 = 17 \cdot 4 = 17 \cdot 2^2 = 2 \cdot 34$ f) $48 = 6 \cdot 8 = 12 \cdot 4 = 3 \cdot 2^4 = 16 \cdot 3$
 b) $45 = 5 \cdot 9 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2$ g) $60 = 2 \cdot 30 = 15 \cdot 4 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 6 = 20 \cdot 3$
 c) $36 = 6 \cdot 6 = 6^2$ h) $102 = 6 \cdot 17 = 3 \cdot 34 = 2 \cdot 3 \cdot 17 = 2 \cdot 51$
 d) $44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11 = 2^2 \cdot 11$ i) $200 = 2 \cdot 10^2 = 2^3 \cdot 5^2 = 2 \cdot 4 \cdot 25 = 2^2 \cdot 50$
 e) $17 = 17 \cdot 1$ j) $380 = 19 \cdot 10 \cdot 2 = 19 \cdot 5 \cdot 2^2$

15 Rispondi alle domande:

- a) Ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?
 b) Ci può essere più di una scomposizione in fattori primi di un numero?
 c) Quando un numero è scomposto in fattori primi?

16 Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:

- | | | | | |
|-------|--------|---------|----------|------------|
| 1) 16 | 7) 40 | 13) 81 | 19) 525 | 25) 4050 |
| 2) 18 | 8) 42 | 14) 105 | 20) 360 | 26) 4536 |
| 3) 24 | 9) 48 | 15) 120 | 21) 675 | 27) 12150 |
| 4) 30 | 10) 52 | 16) 135 | 22) 715 | 28) 15246 |
| 5) 32 | 11) 60 | 17) 180 | 23) 1900 | 29) 85050 |
| 6) 36 | 12) 72 | 18) 225 | 24) 1078 | 30) 138600 |

17 Calcola MCD e m.c.m. dei numeri 180, 72, 90

Scomponendo in fattori si ha $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, _____

18 Descrivi brevemente la differenza tra le seguenti frasi:

“a e b sono due numeri primi”

“a e b sono due numeri primi tra di loro”

Fai degli esempi che mettono in evidenza la differenza tra le due osservazioni.

19 Si vuole pavimentare una stanza a pianta rettangolare di 315 cm per 435 cm con mattonelle quadrate più grandi possibili, senza spreca alcuna. Quali sono le dimensioni delle mattonelle? Quante mattonelle sono necessarie?

20 Quanti divisori ha il numero 2420? Quali sono?

21 Si trovino tutti i divisori di 500 che siano anche multipli di 10. Quanti sono?

22 Esegui le seguenti operazioni rispettando l'ordine

- | | | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|-------------------------|
| a) $15+7-2$ | e) $12-2 \times 2$ | i) $2+2^2+3$ | m) $(3^2)^3-3^2$ |
| b) $16-4+2$ | f) $10-5 \times 2$ | j) $4 \times 2^3+1$ | n) 2^4+2^3 |
| c) $18-8-4$ | g) $20 \times 4:5$ | k) $2^4:2-4$ | o) $2^3 \times 3^2$ |
| d) $16 \times 2-2$ | h) $16:4 \times 2$ | l) $(1+2)^3-2^3$ | p) $3^3:3^2 \times 3^2$ |

23 Quali delle seguenti scritture rappresentano numeri naturali?

- | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| a) $5+3-1$ | d) $7+2-10$ | g) $3-4-12$ | j) $27:9:3$ |
| b) $6+4-10$ | e) $2:5:5$ | h) $12:4-4$ | k) $18:2-9$ |
| c) $5-6+1$ | f) $2:3:4$ | i) $11:3+2$ | l) $10-1:3$ |

24 Calcola il risultato delle seguenti operazioni nei numeri naturali; alcune operazioni non sono possibili, individuale

- | | | | |
|------------|-------------|-------------|------------|
| a) $5:5 =$ | e) $10:2 =$ | i) $10:5 =$ | m) $0:0 =$ |
| b) $5:0 =$ | f) $0:5 =$ | j) $1:5 =$ | n) $1:0 =$ |
| c) $1:5 =$ | g) $5:1 =$ | k) $0:5 =$ | o) $1:0 =$ |
| d) $1-1 =$ | h) $0:0 =$ | l) $5:1 =$ | p) $1:1 =$ |

25 Completa la tabella come nell'esempio

Numero	è pari	dispari	è primo	è multiplo di	è un quadrato	è un cubo
12	SI	NO	NO	2, 3, 4, 6	NO	NO
15
49
8
51
28
144
30
63

26 Determina tutti i divisori di

- a) 32
 b) 18

27 Calcola MCD e m.c.m. dei seguenti gruppi di numeri

- | | | | | |
|---------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|
| a) 15; 5; 10 | sol. [5; 30] | f) 6; 16; 26 | sol. [2;...] | k) 30; 60; 27 |
| b) 2; 4; 8 | sol. [2; 8] | g) 6; 8; 12 | sol. [...;24] | l) 45; 15; 35 |
| c) 2; 1; 4 | sol. [1; 4] | h) 50; 120; 180 | | m) 6; 8; 10; 12 |
| d) 5; 6; 8 | sol. [1; ...] | i) 20; 40; 60 | | n) 30; 27; 45 |
| e) 24; 12; 16 | sol. [4; ...] | j) 16; 18; 32 | | o) 126; 180 |

Completa applicando le proprietà delle potenze

- 28 $7^4 \cdot 7^{-7} = 7^5$ $3^9 \cdot 5^9 = (\dots)^9$ $5^{15} : 5^{-7} = 5^5$ $(\dots)^6 \cdot 5^6 = 15^6$
 29 $8^4 : 2^4 = 2^{-}$ $(18^5 : 6^5)^2 = 3^{-}$ $20^7 : 20^0 = 20^{-}$ $(\dots^3)^4 = 1$

30 Traduci in espressioni aritmetiche le seguenti frasi e calcola il risultato

- Aggiungi 12 al prodotto tra 6 e 4.
- Sottrai il prodotto tra 12 e 2 alla somma tra 15 e 27.
- Moltiplica la differenza tra 16 e 7 con la somma tra 6 e 8.
- Al doppio di 15 sottrai la somma dei prodotti di 3 con 6 e di 2 con 5.
- Sottrai il prodotto di 6 per 4 al quoziente tra 100 e 2.
- Moltiplica la differenza di 15 con 9 per la somma di 3 e 2.
- Sottrai al triplo del prodotto di 6 e 2 il doppio del quoziente tra 16 e 4.
- Il quadrato della somma tra il quoziente intero di 25 e 7 e il cubo di 2
- La somma tra il quadrato del quoziente intero di 25 e 7 e il quadrato del cubo di 2
- La differenza tra il triplo del cubo di 5 e il doppio del quadrato di 5

Calcola il valore delle seguenti espressioni

- $(1+2 \cdot 3):(5-2 \cdot 2)+1+2 \cdot 4$ [16]
- $(18-3 \cdot 2):(16-3 \cdot 4) \cdot (2:2+2)$ [9]
- $2+2 \cdot 6-[21-(3+4 \cdot 3:2)]:2$ [8]
- $\{[15-(5 \cdot 2-4)] \cdot 2\}:(30:15+1)-\{[25:4]:10-(11-2)\}$ [5]
- $[6 \cdot (2 \cdot 4-2 \cdot 3)-6]+[3 \cdot (21:7-2) \cdot [(6 \cdot 5):10]-3 \cdot 2]$ [9]
- $100:2+3^2-2^2 \cdot 6$ [35]
- $2^7:2^3-2^2$ [12]
- $30-5 \cdot 3+7 \cdot 2^2-2$ [41]
- $(3+4)^2-(3^2+4^2)$ [24]
- $5 \cdot 5^3 \cdot 5^4:(5^2)^3+5$ [30]
- $[3^0+(2^4-2^3)^2:(4^3:4^2)+3]:(2^6:2^4)$ [5]
- $[(4^5:4^3)-2^3] \cdot [(3^4 \cdot 3^3):(3^2 \cdot 3)]:(2^2+2^0+3^1)$ [81]
- $(12-5^2:5) \cdot 4^2:2^3+2^2-1+[(2^4:2^3)^3+4^3:4+2^3]:7$ [25]
- $(5^2 \cdot 2^2-(2^5-2^5:(2^2 \cdot 3+4^2:4)+2^3 \cdot (3^2-2^2))):(3 \cdot 2) \cdot 5$ [25]
- $(3^4 \cdot 3^3:3^6)^2+(7^2-5^2):2^2$ [15]
- $(3 \cdot 2^2-10)^4 \cdot (3^3+2^3):7-10 \cdot 2^3$ [0]
- $(195:15) \cdot \{[3^2 \cdot 6+3 \cdot 4^2-5 \cdot (6-1)^2]\}:(4^2-3)$ [-23]
- $5+[(16:8) \cdot 3+(10:5) \cdot 3]:(2^3 \cdot 5-1)^2-[(3 \cdot 10):6-1]$ [18253]
- $[4 \cdot (3 \cdot 2-3 \cdot 1^2)-5]-\{2 \cdot (14:7+4):[2 \cdot (3+2)^2:10+1-4^2:8]\}$ [4]

Risolvi i seguenti problemi

- Un'automobile percorre 18km con 1 litro di benzina. Quanta benzina deve aggiungere il proprietario dell'auto sapendo che l'auto ha già 12 litri di benzina nel serbatoio, che deve intraprendere un viaggio di 432km e che deve arrivare a destinazione con 4 litri di benzina nel serbatoio?
- Ho comprato tre sacchi di fagioli, uno di 120 kg, uno di 75 kg e uno di 51 kg. Voglio confezionare per la vendita al dettaglio pacchi di ugual peso in modo che siano quanto più grandi possibile, che non avanzi nessun fagiolo. Se ho pagato i fagioli a 1 € al kg e intendo rivendere i pacchi a 5 € l'uno quanto guadagno?
- In una città tutte le linee della metropolitana iniziano il loro servizio alla stessa ora. La linea rossa fa una corsa ogni 15 minuti, la linea gialla ogni 20 minuti e la linea blu ogni 30 minuti. Salvo ritardi, ogni quanti minuti le tre linee partono allo stesso momento?
- Tre negozi si trovano sotto lo stesso porticato, ciascuno ha un'insegna luminosa intermittente: la prima si spegne ogni 6 secondi, la seconda ogni 5 secondi, la terza ogni 7 secondi. Se le insegne vengono accese contemporaneamente alle 19.00 e spente contemporaneamente alle 21.00, quante volte durante la serata le tre insegne si spegneranno contemporaneamente?



2. NUMERI INTERI RELATIVI (\mathbb{Z})

Con i numeri naturali non sempre è possibile eseguire l'operazione di sottrazione. In particolare, non è possibile sottrarre un numero più grande da un numero più piccolo, per esempio $5-12$. Tuttavia ci sono situazioni in cui una sottrazione di questo tipo deve essere eseguita.

Per esempio, è possibile acquistare un'auto di 12.000 € pur avendo soltanto risparmi in banca di soli 5.000 €. In questo caso si tratta di togliere dai 5.000 € i 12.000 € che servono per acquistare l'auto. Pensiamo ad una comunicazione dei meteorologi relativa alle previsioni del tempo: "domani la temperatura, per una perturbazione proveniente dai paesi nordici, potrebbe subire un drastico calo e scendere anche di 10 gradi". Riflettiamo: se oggi la temperatura è di 9 gradi, come possiamo esprimere numericamente la temperatura prevista per domani? Alcuni diranno: "il liquido contenuto nel termometro si posizionerà al di sotto dello zero", altri "domani la temperatura sarà di un grado sotto lo zero".

Per rappresentare le grandezze che hanno due sensi, come temperatura, crediti e debiti, la latitudine, altezze e profondità i numeri naturali non bastano. In queste situazioni si usano i numeri "Interi Relativi" che si scrivono utilizzando gli stessi numeri ma preceduti dal segno + se sono numeri maggiori di zero e dal segno - se sono numeri minori di 0. L'insieme di questi numeri si indica con

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}.$$

I numeri relativi possono essere rappresentati su una retta. Disegniamo una retta, su di essa prendiamo un punto di riferimento al quale associamo il numero 0, il verso di percorrenza da sinistra verso destra, un segmento AB come un'unità di misura.

Riportiamo questa unità di misura più volte partendo da zero e camminando nel verso stabilito aggiungiamo ogni volta uno: ai punti trovati associamo gli interi positivi.

Ripetiamo l'operazione partendo dallo zero, ma con il verso di percorrenza a sinistra: ai punti trovati associamo gli interi negativi.

Possiamo interpretare questi numeri come il numero di passi da fare sulla retta, partendo dallo zero verso destra se il segno è positivo, verso sinistra se il segno è negativo.

L'insieme dei soli numeri interi relativi con segno positivo si indica con il simbolo \mathbb{Z}^+ , l'insieme dei soli numeri interi negativi si indica con il simbolo \mathbb{Z}^- .

DEF.: Il **valore assoluto** di un numero relativo è il numero senza il segno, quindi è un numero naturale.

$$|a| = a \text{ se } a \geq 0, \quad |a| = -a \text{ se } a \leq 0$$

Due numeri relativi con lo stesso segno sono detti **concordi**, se hanno segni opposti si dicono **discordi**.

Due numeri interi relativi sono **uguali** se hanno lo stesso segno e lo stesso valore assoluto; si dicono **opposti** se hanno lo stesso valore assoluto ma segni diversi

Esempi : +3 e +5 sono concordi, +3 e -5 sono discordi, -5 e -2 sono concordi -3 e +2 sono discordi. Sono numeri opposti +3 e -3; +5 e -5; +19 e -19.

Confronto di numeri relativi - Dati due numeri interi relativi quello più grande è quello che sulla retta è rappresentato più a destra. In particolare,

- ogni numero intero positivo è maggiore di 0 e di ogni numero negativo;
- tra due numeri positivi il più grande è quello che ha valore assoluto maggiore;
- ogni numero negativo è minore di 0 e di ogni numero positivo;
- tra due numeri negativi il più grande è quello che ha valore assoluto minore;
- 0 è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo.

Esempi

- $+4 > +2$ I numeri sono positivi, il maggiore è +4 perché ha valore assoluto maggiore.
- $-1 < -3$ I numeri sono negativi, il maggiore è -1 perché ha valore assoluto minore.
- $+4 > -2$ Il numero positivo è il maggiore.
- $+4 > 0$ Ogni numero positivo è maggiore di 0.
- $0 > -2$ Ogni numero negativo è minore di 0.

Le operazioni con i numeri relativi

Con i numeri relativi è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni e le sottrazioni. Questo significa che se si addizionano, si sottraggono o si moltiplicano due numeri relativi il risultato si trova sempre nella retta dei numeri relativi.



2.1 Addizione:

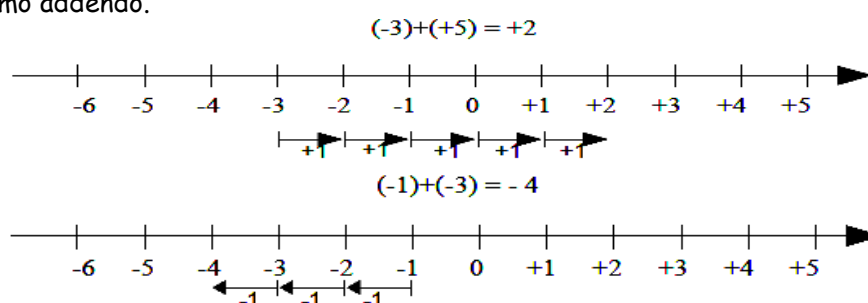
La **somma di due numeri relativi concordi** è il numero che per ha valore assoluto la somma dei singoli valori assoluti e come segno lo stesso segno degli addendi.

La **somma di due numeri relativi discordi** è il numero che ha per valore assoluto la differenza dei valori assoluti e come segno il segno del numero che ha valore assoluto maggiore.

Esempi

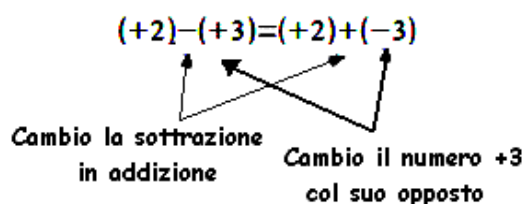
- $(+3)+(+5)=\dots$ i due numeri da sommare sono concordi, il loro segno è +, i loro valori assoluti sono 3 e 5, la loro somma è 8 pertanto $(+3)+(+5)=+8$.
- $(-2)+(-5)=\dots$ i due numeri sono entrambi negativi, quindi sono concordi, i loro valori assoluti sono 2 e 5, la somma ha valore assoluto 7, il segno è -, pertanto $(-2)+(-5)=-7$.
- $(-5)+(+2)=\dots$ i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è -5, pertanto il risultato ha lo stesso segno di -5, cioè è negativo, in definitiva $(-5)+(+2)=-3$.
- $(+5)+(-2)=\dots$ i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la loro differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è +5, pertanto il risultato ha lo stesso segno di +5, cioè è positivo, in definitiva $(+5)+(-2)=+3$.
- $(+3)+(-7)=\dots$ i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 3 e 7, la loro differenza è 4, il numero che ha valore assoluto maggiore è -7, quindi il risultato ha segno negativo, in definitiva $(+3)+(-7)=-4$.

L'addizione si può rappresentare sulla retta come l'azione di muoversi nel verso indicata dal segno del secondo addendo: se è positivo si va verso destra, se è negativo si va verso sinistra iniziando dal punto che rappresenta il primo addendo.



2.2 Sottrazione

La sottrazione tra due numeri relativi si esegue facendo la somma del primo numero con l'opposto del secondo



Esempi

- $(+1)-(+3)=(+1)+(-3)=-2$
- $(-2)-(-1)=(-2)+(+1)=-1$
- $(+3)-(-7)=(+3)+(+7)=+10$
- $(-5)-(+5)=(-5)+(-5)=-10$

Somma algebrica: Poiché la sottrazione può essere trasformata in addizione, si può semplificare la scrittura di addizione e sottrazione di numeri relativi utilizzando soltanto l'operazione di addizione e omettendo di scrivere il segno + dell'addizione. Questo tipo di addizione tra numeri relativi si chiama somma algebrica.

- $(+1)+(-2)$ se omettiamo il segno di addizione + e le parentesi otteniamo $1-2$.
- $(+1)-(+3)$ si trasforma la sottrazione in addizione con l'opposto $(+1)+(-3)$ omettendo il segno di addizione + ed eliminando le parentesi si ottiene $1-3$.
- $(-1)+(+2)+(-3)+(+2)+(-7)+(-5)$ si scrive in modo sintetico $-1+2-3+2-7-5$



2.3 Moltiplicazione

Dati due interi relativi da moltiplicare si chiamano **fattori** i due numeri e **prodotto** il risultato dell'operazione.

DEF.: Il prodotto di due numeri interi relativi è il numero intero avente come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori e come segno, il segno + se i fattori sono concordi, il segno - se i fattori sono discordi.

Esempi

- $(+3) \cdot (-2) = -6$ il numero 6 si ottiene da $3 \cdot 2$, il segno è negativo perché i fattori sono discordi.
- $(-2) \cdot (-3) = +6$ il numero 6 si ottiene da $3 \cdot 2$, il segno è positivo perché i fattori sono concordi.
- $(+5) \cdot (+3) = +15$ il numero 15 si ottiene da $5 \cdot 3$, il segno è positivo perché i fattori sono concordi.
- $(-1) \cdot (+2) = -2$ il numero 2 si ottiene da $1 \cdot 2$, il segno è negativo perché i fattori sono discordi.



2.4 Divisione

La regola della divisione è del tutto analoga a quella della moltiplicazione. Per dividere due numeri relativi si dividono i valori assoluti e si attribuisce al risultato il segno + se i numeri da dividere sono concordi, il segno - se i numeri sono discordi.

Osserva che mentre addizione, sottrazione e moltiplicazione sono operazioni sempre possibili tra numeri interi relativi, ossia il risultato di queste operazioni è sempre un numero intero relativo, il risultato della divisione non sempre è un numero intero relativo. La divisione tra numeri relativi è possibile se è possibile la divisione tra i loro valori assoluti, ossia se il divisore è diverso da zero ed è un sottomultiplo del dividendo.

Esempi

- $(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = +9$
- $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$
- $(+3)^3 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +27$
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Ricordiamo poi che un qualsiasi numero, diverso da 0, elevato a 0 dà come risultato il numero 1 e che qualsiasi numero elevato a 1 rimane invariato. $a^0 = 1$ $a^1 = a$ con $a \neq 0$



2.5 Potenza di un numero relativo

La definizione di potenza per un numero relativo è la stessa di quella data per i numeri naturali (in questo caso la base è un numero relativo ma l'esponente è un numero naturale). Si moltiplicano tra di loro tanti fattori uguali alla base quante volte è indicato dall'esponente. L'unica attenzione che dobbiamo avere è quella relativa al segno:

- se la base è un numero positivo il risultato della potenza sarà sempre positivo;
- se la base è un numero negativo il segno dipende dall'esponente: se l'esponente è dispari il risultato è negativo, se l'esponente è pari il risultato è un numero positivo.

Esempi

- $(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = +9$
- $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$
- $(+3)^3 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +27$
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Ricordiamo poi che un qualsiasi numero, diverso da 0, elevato a 0 dà come risultato il numero 1 e che qualsiasi numero elevato a 1 rimane invariato.

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad \text{con } a \neq 0$$

Esempi

$$(-3)^0 = 1 \quad (+5)^0 = 1 \quad (-2)^1 = -2 \quad (+7)^1 = +7$$

Le operazioni nell'insieme dei numeri relativi godono delle proprietà:

- **commutativa** per l'addizione e la moltiplicazione;
- **associativa** per l'addizione e la moltiplicazione;
- **distributiva** della moltiplicazione rispetto all'addizione:

L'insieme \mathbb{Z} è dotato sia dell'elemento neutro rispetto la somma che rispetto il prodotto.



1 Riscrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) i seguenti numeri relativi:

+11 -3 0 +2 -5 -7 +1

2 Riscrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo) i seguenti numeri relativi:

-5 -2 +3 -1 0 +7 -9 +13 -21

3 Disponi sulla retta orientata i seguenti numeri relativi, e riscrivili in ordine crescente

-3 +2 +5 -7 -5 -1 +3



4 Per ciascuno dei seguenti numeri relativi scrivi il valore assoluto

a) $|+3| = \dots$

c) $|-1| = \dots$

e) $|-11| = \dots$

b) $|-5| = \dots$

d) $|+10| = \dots$

f) $|+7| = \dots$

5 Scrivi tra le seguenti coppie di numeri relativi il simbolo corretto tra $>$ e $<$

a) $-5 \dots -2$

e) $-3 \dots -5$

i) $0 \dots +1$

m) $-11 \dots -101$

b) $-3 \dots +5$

f) $-1 \dots +1$

j) $+3 \dots 0$

n) $+100 \dots -99$

c) $-2 \dots +2$

g) $+3 \dots -3$

k) $0 \dots -2$

o) $-101 \dots +110$

d) $-5 \dots 0$

h) $-1 \dots -5$

l) $+7 \dots +2$

p) $-1010 \dots -1100$

6 Per ciascuno dei seguenti numeri relativi scrivi il valore assoluto

a) $|+3| = \dots$

c) $|-1| = \dots$

e) $|-11| = \dots$

b) $|-5| = \dots$

d) $|+10| = \dots$

f) $|+7| = \dots$

7 Scrivi tra le seguenti coppie di numeri relativi il simbolo corretto tra $>$ e $<$

a) $-5 \dots -2$

e) $-3 \dots -5$

i) $0 \dots +1$

m) $-11 \dots -101$

b) $-3 \dots +5$

f) $-1 \dots +1$

j) $+3 \dots 0$

n) $+100 \dots -99$

c) $-2 \dots +2$

g) $+3 \dots -3$

k) $0 \dots -2$

o) $-101 \dots +110$

d) $-5 \dots 0$

h) $-1 \dots -5$

l) $+7 \dots +2$

p) $-1010 \dots -1100$

8 Esegui le seguenti somme algebriche

a) $+3 -1 = + \dots$

f) $-3 +5 = \dots 2$

k) $-2 -2 = \dots \dots$

b) $+2 -3 = - \dots$

g) $+8 -0 = \dots \dots$

l) $+9 -3 = \dots 6$

c) $-5 +2 = - \dots$

h) $-9 +0 = \dots \dots$

m) $+7 -6 = + \dots$

d) $-2 +2 = \dots \dots$

i) $0 -5 = \dots \dots$

n) $-101 +9 = - \dots$

e) $-5 -2 = \dots 7$

j) $+1 -1 = \dots \dots$

o) $-10 +5 = \dots 5$

9 Esegui le seguenti addizioni di numeri relativi

a) $(+3)+(+2) =$

f) $(-3)+(+13) =$

k) $(+7)+(-6) =$

b) $(-5)+(-5) =$

g) $(+10)+(-5) =$

l) $(-9)+(-3) =$

c) $(-3)+(+5) =$

h) $(+1)+(+1) =$

m) $(-101)+(+2) =$

d) $(+12)+(+2) =$

i) $(-10)+0 =$

n) $0+(-9) =$

e) $(-2)+(-3) =$

j) $(-4)+(+4) =$

o) $(-10)+(+10) =$

10 Esegui le seguenti sottrazioni di numeri relativi

a) $(-1)-(+2) =$

f) $(-3)-(+1) =$

k) $(+7)-(-2) =$

b) $(-5)-(+3) =$

g) $(+11)-(-5) =$

l) $(-3)-(-3) =$

c) $(-2)-(+5) =$

h) $(+21)-(+11) =$

m) $0-(-11) =$

d) $(+12)-(+2) =$

i) $(-1)-0 =$

n) $(-6)-(-6) =$

e) $(+1)-(-3) =$

j) $(-3)-(+4) =$

o) $(+5)-(-5) =$

11 Per ognuno dei seguenti numeri relativi scrivi il numero opposto

a) $+3 \rightarrow \dots$

c) $+1 \rightarrow \dots$

e) $-3 \rightarrow \dots$

b) $-2 \rightarrow \dots$

d) $-11 \rightarrow \dots$

f) $+5 \rightarrow \dots$

12 Esegui le seguenti somme algebriche

a) $-5 -2 =$

g) $+8 -7 =$

m) $+4 -6 =$

b) $+3 -4 =$

h) $+2 -1 =$

n) $-10 +5 =$

c) $-1 +2 =$

i) $-6 +2 =$

o) $-16 -4 =$

d) $-3 +4 =$

j) $+5 -2 =$

p) $-3 -9 =$

e) $-6 +7 =$

k) $+4 -3 =$

q) $+14 -7 =$

f) $-1 -9 =$

l) $+4 +1 =$

r) $-10 -10 =$

13 Esegui le seguenti moltiplicazioni

- a) $(+3) \cdot (+1) =$ e) $(+3) \cdot (-3) =$ i) $(+1) \cdot (-10) =$
 b) $(+1) \cdot (-2) =$ f) $(-2) \cdot (+5) =$ j) $(-4) \cdot (+3) =$
 c) $(+3) \cdot (-3) =$ g) $(-1) \cdot (-7) =$ k) $(+5) \cdot (-6) =$
 d) $(-5) \cdot (-1) =$ h) $(+3) \cdot (+11) =$ l) $(-3) \cdot (-2) =$

14 Esegui le seguenti divisioni

- a) $(+4) : (+2) =$ e) $(-8) : (+4) =$ i) $(-12) : (+6) =$
 b) $(+5) : (-1) =$ f) $(-4) : (+2) =$ j) $(-12) : (+4) =$
 c) $(+6) : (+2) =$ g) $(-10) : (+5) =$ k) $(+12) : (-3) =$
 d) $(+8) : (-2) =$ h) $(+10) : (-2) =$ l) $(-12) : (+1) =$

15 Calcola il valore delle seguenti potenze

- a) $(+3)^2 =$ f) $(+2)^3 =$ k) $(-4)^2 =$
 b) $(-1)^2 =$ g) $(-3)^2 =$ l) $(-2)^4 =$
 c) $(+1)^3 =$ h) $(-3)^3 =$ m) $(-3)^0 =$
 d) $(-2)^2 =$ i) $(-4)^1 =$ n) $(-1)^5 =$
 e) $(-2)^3 =$ j) $(+4)^1 =$ o) $(-2)^4 =$

16 Applica le proprietà delle potenze

- a) $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{\dots}$ f) $(-7)^3 : (-7)^3 = (-7)^{\dots}$ k) $(-3)^3 \cdot (+3)^3 = \dots$
 b) $(-2)^4 \cdot (-2)^5 = (-2)^{\dots}$ g) $(-2)^4 : (-2)^2 = (-2)^{\dots}$ l) $(-8)^2 : (-4)^2 = \dots$
 c) $(-5) \cdot (-5)^2 = (-5)^{\dots}$ h) $(-6)^4 : (+2)^4 = (\dots)^4$ m) $[(+7)^2]^3 : (-7)^3 = \dots$
 d) $(-10)^2 \cdot (-5)^2 = (\dots)^2$ i) $[(-3)^2]^3 = (-3)^{\dots}$ n) $[(-3)^3]^2 : (-3)^4 = \dots$
 e) $(-3)^4 : (-3)^2 = (-3)^{\dots}$ j) $[(-5)^2]^3 = (+5)^{\dots}$

Completa le tabelle :

17

a	+1	-2	0	+2	-3	+3	-1	+4	-5
b	0	-2	-3	+1	-5	-3	-10	-5	+4
a+b									

18

a	-2	-2	-3	+2	-10	+3	-1	-7	+8
b	0	-3	-3	-5	-5	-1	-10	-5	+8
a-b									

19

a	+1	-2	0	+2	-3	+3	-1	+4	-5
b	0	-2	-3	+1	-5	-3	-10	-5	+4
a+b									

20

a	-2	-2	-3	+2	-10	+3	-1	-7	+8
b	0	-3	-3	-5	-5	-1	-10	-5	+8
a-b									

21

a	-2	+1	+2	-1	+3	-3	-4	-2	+2
b	1	3	2	4	2	3	2	4	5
a ^b									

22

a	-2	+2	-1	+2	-10	-5	-1	-7	+8
b	+1	-3	-2	-1	+11	+1	-7	-2	-3
c	-3	-5	-6	+1	-1	-2	-2	-5	-3
a-(b+c)									

23	a	-2	+2	-1	+2	-10	-5	-1	-7	+8
	b	+1	-3	-2	-1	+11	+1	-7	-2	-3
	a·b									

24	a	-2	+12	-6	+20	-10	-5	-21	-16	+8
	b	+1	-3	-2	-1	-5	+1	-7	-2	-4
	a:b									

25	a	-2	+2	-1	+2	-10	-5	-1	-7	+8
	b	+1	-3	-2	-1	+11	+1	-7	-2	-3
	c	-3	-5	-6	+1	-1	-2	-2	-5	-3
	(a+b)·c									

26	a	-2	+12	-6	+20	-10	-5	-21	-16	+8
	b	+1	-3	-2	-1	-5	+1	+19	-14	-4
	(a-b) ²									

27	a	-2	+12	-6	+20	-10	-5	-21	-16
	b	+1	-3	-2	-1	-5	+1	+19	-14
	(a+b)·(a-b)								

28 In quali delle seguenti situazioni è utile ricorrere ai numeri relativi?

- misurare la temperatura
- contare le persone
- esprimere la data di nascita di un personaggio storico
- esprimere l'età di un personaggio storico
- indicare il saldo attivo o passivo del conto corrente
- indicare l'altezza delle montagne e le profondità dei mari

29 La somma di due numeri relativi è sicuramente positiva quando

- [A] i due numeri sono concordi [B] i due numeri sono discordi
 [C] i due numeri sono entrambi positivi [D] i due numeri sono entrambi negativi

30 La somma di due numeri relativi è sicuramente negativa quando

- [A] i due numeri sono concordi [B] i due numeri sono discordi
 [C] i due numeri sono entrambi positivi [D] i due numeri sono entrambi negativi

31 Il prodotto di due numeri relativi è positivo quando (più di una risposta possibile)

- [A] i due numeri sono concordi [B] i due numeri sono discordi
 [C] i due numeri sono entrambi positivi [D] i due numeri sono entrambi negativi

32 Il prodotto di due numeri relativi è negativo quando

- [A] i due numeri sono concordi [B] i due numeri sono discordi
 [C] i due numeri sono entrambi positivi [D] i due numeri sono entrambi negativi

32 Il prodotto di due numeri relativi è negativo quando

- [A] i due numeri sono concordi [B] i due numeri sono discordi
 [C] i due numeri sono entrambi positivi [D] i due numeri sono entrambi negativi

33 Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- Ogni numero relativo è minore di zero [V] [F]
- La somma di due numeri discordi è zero [V] [F]
- Il cubo di un numero intero relativo è sempre negativo [V] [F]
- La somma di due numeri opposti è nulla [V] [F]
- Il quoziente di due numeri opposti è l'unità [V] [F]
- Il quoziente di due numeri concordi è positivo [V] [F]
- Il prodotto di due numeri opposti è uguale al loro quadrato [V] [F]
- Il doppio di un numero intero negativo è positivo [V] [F]
- La somma di due interi concordi è sempre maggiore di ciascun addendo [V] [F]
- Il quadrato dell'opposto di un intero relativo è uguale all'opposto del suo quadrato [V] [F]

34 *Inserisci l'operazione corretta*

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| a) $(+2) \dots (-1) = -2$ | d) $(+15) \dots (-20) = -5$ | g) $(+1) \dots (+1) = 0$ |
| b) $(-10) \dots (+5) = -2$ | e) $(-12) \dots (+4) = -3$ | h) $(+5) \dots (-6) = +11$ |
| c) $(-18) \dots (-19) = +1$ | f) $(-4) \dots 0 = 0$ | i) $-8 \dots (-2) = +16$ |

35 *Inserisci il numero mancante*

- | | | |
|------------------------|----------------------------|---------------------------|
| a) $+5 + (\dots) = -5$ | d) $0 - (\dots) = -2$ | g) $(+16) : (\dots) = -2$ |
| b) $-8 + (\dots) = -6$ | e) $+3 \cdot (\dots) = -3$ | h) $(-6) : (\dots) = -1$ |
| c) $+7 - (\dots) = 0$ | f) $-5 \cdot (\dots) = 0$ | i) $(-10) : (\dots) = +5$ |

36 *Scrivi tutti i numeri interi relativi*

- interi relativi che hanno valore assoluto minore di 5;
- interi relativi il cui prodotto è -12
- interi negativi maggiori di -5

37 *Il risultato di $3^5 + 5^3$ è*

- [A] 368 [B] $(3+5)^5$ [C] 15+15 [D] 8^8

38 *Il risultato di $(73+27)^2$ è*

- [A] 200 [B] $73^2 + 27^2$ [C] 10^4 [D] 1000

39 $-5 + 7 + 4 - 9$ [-3]

40 $+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$ [+1]

41 $+1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$ [-3]

42 $+1 - 2 + 2 - 3 + 3 - 4 + 5 - 6 + 6 - 7 + 7 - 8 + 8 - 9 + 9 - 10$ [-8]

43 $(-3 + 10) - (2 - 3)$ [+8]

44 $(+5 - 2 - 1) + (+2 + 4 + 6)$ [14]

45 $(-5 + 7 - 9) + (+1 - 2 + 3) - (+4 - 6 + 8)$ [-11]

46 $+4 - 3 - [+2 - 1 - (8 - 3) - (-5 - 2)] - (2 + 3)$ [-7]

47 $-2 + (-5 + 1) + (-7 + 4) - 2 \cdot (-6 + 1)$ [+1]

48 $15 - 9 \cdot (-14 + 12) + 8 \cdot (-3 + 6) + 5 \cdot (-3 + 1)$ [+47]

49 $(50 - 36 - 25) \cdot (-15 + 5 + 20) - 10 \cdot (-3 - 7)$ [-10]

50 $[+3 - (10 - 5 + 25)] \cdot [-16 + 5 - (-2 - 14)] : (9 + 6)$ [-9]

51 $20 : (+15 - 5) - 30 : (-10 + 5) + 40 : (15 - 20)$ [0]

52 $18 : (-3) + 6 \cdot [1 - 5 \cdot (-2 + 4) + 3] : (-6)$ [0]

53 $3 \cdot 4 - 3 \cdot [18 : (-2) - 17 + (14 - 26 + 5) \cdot 3 - 12] + [16 - 1 \cdot (-1 - 3 + 5) - 37 + 16]$ [183]

Calcola il valore delle seguenti espressioni

54 $-5 \cdot (12 - 3 + 4) - 2 \cdot [3 - 16 : (-2 + 4)]^2$ [-115]

55 $[-3 + (-5) \cdot (-1)]^3 + [-4 - (1 - 2)]^2$ [+17]

56 $[2 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) \cdot (-2)]^2 : [2^4 - 3 \cdot (+6)]^2$ [225]

57 $[3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-3) \cdot (-3)]^3 : [2^2 + 5 \cdot (-2)^2]^3$

58 $(-3)^2 \cdot (4 - 1)^5 : [(-4)^3 : (2^5) - 3^3 : (-3)^3]$ [-3⁷]

59 $[-(-2) \cdot 2 + (-10)^2 : (-5)^2] \cdot [3 - 5 + 2 \cdot (-3)^2 - 5]$ [88]

60 $13 - 3 - 4 \cdot (-2)^2 - 5^3 : 5^2 + 3 \cdot (2^3 - 3^2) - 6 : (-3) - (4 - 7 + 3)^4$ [-12]

61 $-1 - 3 \cdot (-3)^2 - 4^3 : 4^2 + (-3 - 3) \cdot (2^2 + 3^2) - (-12) : (-3)$

62 $[10 - 6 \cdot (-2)^2] : (-7) + (3^2 : 3) \cdot 2^3 - 15 : (-3) + [(-3)^3 : (-3)^0]$ [+4]

63 $|-5 + 8| - |-11| + (-|+4| - |-2 \cdot (+5)|)^2$ [1592]

64 $(-29 + 37)^5 \cdot (-5 + |23 - 28|)^7$ [0]

$$65 \quad -2 \cdot (-2 \cdot |-2|)^2 - (|3-5| \cdot (3-5))^2 \cdot (-2) \quad [0]$$

$$66 \quad (-1)^3 \cdot (-1 \cdot |-1|)^2 - (|-3-2| \cdot (-5+3))^2 \cdot (-2+1)^3$$

67 Traduci in una espressione matematica le seguenti frasi e motivane la verità o falsità

a) Il cubo del quadrato di un numero diverso da zero è sempre positivo. [V] [F]

b) Il quadrato della somma di un numero con il suo opposto è sempre positivo. [V] [F]

68 Sottrarre dal cubo di -3 la somma dei quadrati di +2 e -2. Il risultato è ?

69 Partendo dal piano terreno scendo di 15 gradini, salgo di 12 gradini, scendo di 7 gradini e risalgo di 8. A che punto mi trovo rispetto al piano terreno?

70 Giocando a carte contro 2 avversari nella prima partita ho vinto 50 gettoni con il primo giocatore e ne perdo 60 con il secondo, nella seconda partita ho perso 30 gettoni con il primo giocatore e ne perdo 10 con il secondo. Quanti gettoni ho vinto complessivamente?

71 Un polpo congelato è stato appena tolto dal congelatore, la sua temperatura è -12° ; viene immerso nell'acqua bollente e la sua temperatura media è aumentata di 6° : A quale temperatura media si trova ora il polpo? [-6°]

72 Il prodotto di 2 numeri interi è +6, la loro somma è -5. Quali sono i due numeri?

73 Il prodotto di due numeri interi relativi è +80, aumentando di 1 il primo numero il prodotto è +72. Quali sono i due numeri? [-10, -8]

74 Determina due numeri relativi aventi come prodotto +12 e come somma -7.

75 Una lumaca sale su un muro alto 10 metri, di giorno sale di 2 metri, ma di notte scende di 1 metro. In quanti giorni la lumaca arriva in cima?

Per l'esercitazione e l'approfondimento visita i siti:

- www.chiha.pauradellamatematica.org

- <http://www.matematicamente.it>


Usa questo spazio per formalizzare i problemi.



3. FRAZIONI E NUMERI RAZIONALI (\mathbb{Q})

Quando si deve dividere una certa grandezza o totalità in un certo numero di parti uguali non sempre sono sufficienti i numeri interi per rappresentare il risultato della divisione. Per esempio, per dividere l'unità in due parti uguali i numeri interi non sono sufficienti.

Gli antichi hanno affrontato questo tipo di problema utilizzando varie scritte per rappresentare le parti in cui dividere l'unità, ossia le frazioni. Gli Egizi facevano largo uso dei numeri frazionari che rappresentavano come somme di frazioni unitarie, ossia frazioni con numeratore uno. La frazione unitaria $\frac{1}{n}$ (con n numero naturale diverso da zero) veniva rappresentata in forma geroglifica ponendo il denominatore n scritto con la normale rappresentazione del numero n sotto ad un ovale.

Ad esempio la frazione $\frac{1}{12}$ veniva rappresentata con .

I Romani fecero poco uso dei numeri frazionari; si limitarono a considerare le parti delle misure in uso che venivano divise in 12, 24, 36, 48... Avevano pertanto simboli e nomi particolari per indicare alcune

frazioni: semis per indicare $\frac{1}{2}$, sextans per indicare $\frac{1}{6}$, dracma per indicare $\frac{1}{96}$ e obolus per indicare la sesta parte della dracma. Furono gli arabi a introdurre l'attuale scrittura delle frazioni e i termini "numeratore" e "denominatore".



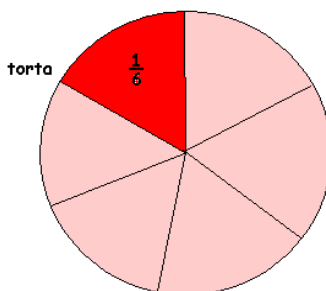
3.1 Frazioni

DEF.: Una frazione è una coppia ordinata di numeri naturali in cui il primo si chiama **numeratore** ed il secondo **denominatore**. Il denominatore deve essere diverso da zero.

$$\frac{a}{n}$$

↗ numeratore
↘ denominatore $n \neq 0$

Il denominatore della frazione $\frac{1}{n}$ (detta **frazione unitaria**) indica in quante parti uguali deve essere divisa l'unità. Ad esempio se voglio un $\frac{1}{6}$ di torta devo dividere la torta in 6 parti uguali. Una fetta è la frazione richiesta.



DEF.: Il **denominatore** di una frazione è quel numero che indica in quante parti uguali si è diviso l'intero, poiché non ha senso dividere un intero in zero parti, il denominatore deve essere diverso da zero.

Il quadrato Q della figura è stato diviso in quattro parti uguali e una parte è stata colorata di giallo; questa parte viene indicata con la frazione unitaria $\frac{1}{4}$



mentre è:



$\frac{2}{4}Q$



$\frac{3}{4}Q$



$\frac{4}{4}Q$

DEF.: Si chiamano **proprie** le frazioni che hanno il numeratore minore del denominatore. Esse rappresentano sempre una grandezza minore dell'intero.

Esempi



DEF.: Si dicono **equivalenti** due frazioni che rappresentano la stessa parte dell'intero.

PROPRIETA' INVARIANTIVA DELLE FRAZIONI. Se si moltiplica, o si divide, numeratore e denominatore di una stessa frazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene una frazione equivalente alla frazione data.

DEF.: Una frazione si dice **ridotta ai minimi termini** se numeratore e denominatore sono due interi primi tra loro.

Esempi

Per ridurre ai minimi termini una frazione occorre dividere numeratore e denominatore per il loro Massimo Comune Divisore.

Ridurre ai minimi termini la frazione $8/12$.

* Scompongo in fattori 8 e 12, ottengo $8=2^3$ e $12=2^2 \cdot 3$;



* calcolo il M.C.D. prendendo i fattori comuni con l'esponente più piccolo, in questo caso 22 cioè 4;

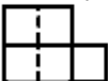
$$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$$

* divido numeratore e denominatore per 4:

DEF.: Si chiamano **apparenti** le frazioni che hanno il numeratore multiplo del denominatore; esse rappresentano una grandezza multipla di quella presa come intero unitario.

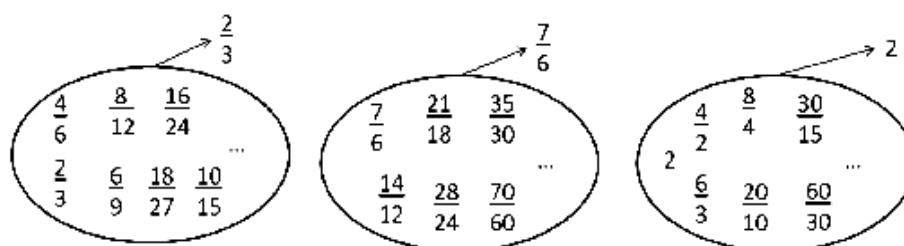
Si chiamano **improprie** le frazioni che hanno il numeratore maggiore del denominatore e primi tra loro; esse rappresentano una grandezza maggiore della grandezza assegnata come intero.

Per esempio $\frac{5}{4}$ di  si ottiene dividendo il quadrato in 4 parti uguali  e prendendone

5, si ha . La grandezza ottenuta è formata da $\frac{4}{4}$ con l'aggiunta di $\frac{1}{4}$. Cioè $\frac{5}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4}$

Dalle frazioni ai numeri razionali

Abbiamo visto che ci sono delle frazioni che, pur essendo diverse tra di loro, rappresentano la stessa parte dell'intero: queste frazioni vengono chiamate "frazioni equivalenti". Possiamo formare dei raggruppamenti di frazioni tra loro equivalenti, come nel disegno.



DEF.: Ogni raggruppamento di frazioni equivalenti è definito come un **numero razionale assoluto** ed è rappresentato da una qualunque frazione del raggruppamento; solitamente si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini. Un numero razionale assoluto preceduto dal segno è detto **numero razionale**.

L'insieme dei numeri razionali relativi si indica con il simbolo \mathbb{Q} .

Il segno del numero razionale relativo è quello che si ottiene dalla regola della divisione dei segni tra numeratore e denominatore.

$$\frac{-2}{-3} = +\frac{2}{3} ; \quad \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} ; \quad \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

I numeri razionali, rappresentati finora come frazioni, possono essere scritti come numeri decimali: basta fare la divisione tra numeratore e denominatore, il quoziente ottenuto è la rappresentazione della frazione sotto forma decimale.

$$\frac{1}{3} = 0,3333\dots \quad \begin{array}{r} 1 \\ 10 \\ \underline{10} \\ 10 \\ \underline{10} \\ \dots \end{array} \quad \frac{11}{8} = 1,375 \quad \begin{array}{r} 11 \\ 3 \\ \underline{30} \\ 60 \\ \underline{60} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

I numeri decimali che si ottengono sono di due tipi: numeri decimali finiti come 1,375 e numeri decimali periodici come 1,333333333... , quest'ultimo si scrive mettendo un barra sulla parte periodica $1,\overline{3}$ oppure racchiudendo la parte periodica tra parentesi tonde $1,(3)$.

I numeri **decimali finiti** si ottengono dalle frazioni il cui denominatore ha come fattori solo il 2, solo il 5 o entrambi, eventualmente elevati a una potenza.

I numeri **decimali periodici semplici** si ottengono dalle frazioni il cui denominatore non ha per fattori né 2 né 5.

I numeri **decimali periodici misti** si ottengono dalle frazioni il cui denominatore contiene altri fattori oltre al 2 e al 5.

$$\frac{11}{8} = \frac{11}{2^3} = \frac{11 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{1375}{1000} = 1,375$$

$$\frac{13}{40} = \frac{13}{2^3 \cdot 5} = \frac{13 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{325}{1000} = 0,325$$

$$\frac{7}{25} = \frac{7}{5^2} = \frac{7 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{28}{100} = 0,28$$

$$\frac{50}{7} = \frac{\dots}{10} \quad \text{non è possibile}$$

Procedura per trasformare una frazione in numero decimale

- * eseguire la divisione tra numeratore e denominatore;
- * se la divisione ha un resto mettere la virgola al quoziente e moltiplicare per 10 il resto;
- * continuare la divisione finché il resto è zero oppure fino a che non si trova un resto già trovato prima;
- * se la divisione si conclude con resto 0 si ottiene un numero decimale finito;
- * se la divisione si conclude perché si è ritrovato un resto ottenuto in precedenza si ottiene un numero decimale periodico.

$\begin{array}{r} 113 \overline{)20} \\ \underline{100} \\ 130 \\ \underline{120} \\ 100 \\ \underline{100} \\ 0 \end{array}$ $\frac{113}{20} = 5,65$ <p>numero decimale finito</p>	$\begin{array}{r} 17 \overline{)6} \\ \underline{12} \\ 50 \\ \underline{48} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 2 \\ \underline{17} \\ 6 \end{array}$ $\frac{17}{6} = 2,8\overline{3}$ <p>numero decimale periodico misto di periodo 3</p>	$\begin{array}{r} 15 \overline{)7} \\ \underline{14} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 1 \end{array}$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Procedura per trasformare un numero decimale finito in una frazione

- * contare le cifre significative dopo la virgola;
- * moltiplicare numeratore e denominatore per la potenza del 10 che ha esponente uguale al numero delle cifre significative dopo la virgola.

$$\frac{1,36}{1} = \frac{1,36 \cdot 10^2}{1 \cdot 10^2} = \frac{136}{100} = \frac{34}{25}$$

1.360 ha due cifre significative dopo la virgola

0,00043000 ha cinque cifre significative dopo la virgola $\frac{0,00043}{1} = \frac{0,00043 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^5} = \frac{43}{100000}$

Procedura per determinare la frazione generatrice di un numero periodico

- * scrivere il numero senza la virgola $2,5\overline{12} \rightarrow 2512$;
- * il numeratore della frazione si ottiene sottraendo dal numero senza la virgola il numero costituito dalle cifre che precedono il periodo $2512 - 25 = 2487$;
- * il denominatore della frazione si ottiene scrivendo tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le eventuali cifre dell'antiperiodo 990 :

$$2,5\overline{12} = \frac{2,512}{990}$$



3.2 Le percentuali

Avrai sentito parlare spesso che il prezzo di un oggetto è stato scontato del 10 per cento, oppure che un partito politico ha preso il 25 per cento di voti e altre espressioni simili che coinvolgono le percentuali. Le percentuali sono un altro modo per scrivere le frazioni.

DEF.: Le percentuali sono frazioni che hanno come denominatore 100 e come numeratore un numero intero o decimale.

La percentuale si indica con un numero intero o decimale seguita dal simbolo %.

$$35\% = \frac{35}{100}; 7\% = \frac{7}{100}; 12,5\% = \frac{12,5}{100} = \frac{125}{1000}$$

- Per passare dalla scrittura percentuale alla scrittura decimale basta dividere per 100 il numero che esprime la percentuale:

$$35\% = \frac{35}{100} = 0,35; 7\% = \frac{7}{100} = 0,07; 12,5\% = \frac{12,5}{100} = 0,125$$

- Per passare dalla scrittura decimale alla scrittura in percentuale basta moltiplicare numeratore e denominatore per 100:

$$0,02 = \frac{0,02}{1} = \frac{2}{100} = 2\%; 0,23 = \frac{0,23}{1} = \frac{23}{100} = 23\%; 1,21 = \frac{1,21}{1} = \frac{121}{100} = 121\%$$

- Per passare da una frazione alla percentuale conviene prima scrivere la frazione come numero decimale e poi da questo passare alla percentuale:

$$\frac{2}{3} = 0,\overline{6} = \frac{0,\overline{6}}{1} = \frac{66,\overline{6}}{100} = 66,\overline{6}\%$$

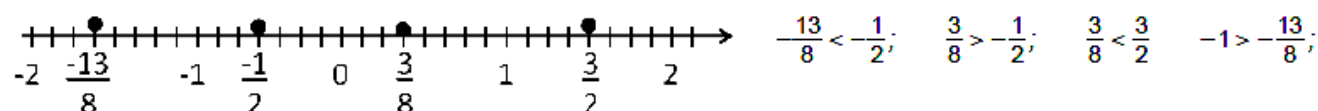
Confronto tra numeri razionali

Il numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{a}{n}$ è minore del numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{b}{m}$, se nella retta orientata il punto che corrisponde alla frazione $\frac{a}{n}$ precede il punto che corrisponde alla frazione $\frac{b}{m}$ e si scrive $\frac{a}{n} < \frac{b}{m}$.

Il numero razionale $\frac{a}{n}$ è maggiore di $\frac{b}{m}$, se nella retta orientata il punto che corrisponde alla frazione $\frac{a}{n}$ segue il punto che corrisponde alla frazione $\frac{b}{m}$ e si scrive $\frac{a}{n} > \frac{b}{m}$.

Il numero razionale $\frac{a}{n}$ è equivalente a $\frac{b}{m}$ se nella retta orientata i punti che corrispondono alle frazioni $\frac{a}{n}$ e $\frac{b}{m}$ coincidono.

Esempio



Procedura per confrontare due frazioni

- * si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni;
- * si trasforma ciascuna frazione come segue:
 - 1 il nuovo denominatore è il m.c.m. trovato;
 - 2 il nuovo numeratore si ottiene dividendo il m.c.m. per il denominatore della frazione data e moltiplicando il quoziente ottenuto per il numeratore della frazione data;
- * si confrontano i nuovi numeratori: la frazione più grande è quella che ha il numeratore più grande.

Osservazioni: Un altro modo per confrontare due frazioni consiste nel 'moltiplicare in croce' numeratori e denominatori delle frazioni (vedi l'esempio successivo).

moltiplichiamo il numeratore della prima frazione col denominatore della seconda e il denominatore della prima per il numeratore della seconda, così:

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{3} \quad \text{perché} \quad 3 \cdot 3 < 2 \cdot 5$$

Le operazioni con i numeri razionali



3.3 Somma

Con i numeri razionali è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni, le sottrazioni e le divisioni. In altre parole, poiché un numero razionale può essere scritto sotto forma di frazione, se si addizionano, si moltiplicano, si sottraggono, si dividono due frazioni il risultato è sempre una frazione.

Se le unità frazionarie sono diverse dobbiamo considerare frazioni equivalenti a quelle date che abbiano la stessa unità frazionaria e poi eseguire l'addizione come indicato nel punto precedente e cioè sommando i numeratori e lasciando lo stesso denominatore comune.

$$\begin{array}{l} \frac{5}{3} = \frac{25}{15} \\ \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \end{array} \longrightarrow \boxed{+} \longrightarrow \frac{31}{15}$$

In generale data l'addizione di due frazioni $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ la somma si può scrivere come $\frac{mq + pn}{nq}$.

Quando si sommano due frazioni si può scegliere un qualsiasi denominatore comune, tuttavia per semplificare i calcoli conviene scegliere il più piccolo possibile, cioè il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni da sommare.

Procedura per sommare due o più frazioni:

- * ridurre le frazioni ai minimi termini;
- * calcolare il minimo comune multiplo dei denominatori;
- * mettere il minimo comune multiplo come denominatore della frazione somma;
- * per ogni frazione dividere il m.c.m. per il suo denominatore e moltiplicare il risultato per il numeratore della frazione mantenendo il segno;
- * calcolare la somma algebrica di tutti i numeri trovati;
- * mettere la somma ottenuta come numeratore della frazione somma;
- * ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta.

Esempi

■ **Sommare le frazioni** $\frac{8}{12} - \frac{5}{6} + \frac{8}{5} - 1$

Passo 1: riduco ai minimi termini le frazioni $\frac{2}{3} - \frac{5}{6} + \frac{8}{5} - 1$

■ **Passo 2:** calcolo il mcm(3.6.5.1) = 30

■ **Passo 3:** la frazione somma avrà come denominatore il m.c.m. trovato $\frac{\dots}{30}$

■ **Passo 4:** per ogni frazione divido il m.c.m. per il suo denominatore e moltiplico il risultato per il numeratore

$$\frac{2 \cdot (30:3) - 5 \cdot (30:6) + 8 \cdot (30:5) - 1 \cdot (30:1)}{30} = \frac{2 \cdot 10 - 5 \cdot 5 + 8 \cdot 6 - 1 \cdot 30}{30} = \frac{20 - 25 + 48 - 30}{30}$$

- **Passo 5:** calcolo la somma algebrica dei numeri ottenuti al numeratore +13
- **Passo 6:** metto la somma ottenuta al numeratore della frazione somma $+\frac{13}{30}$
- **Passo 7:** vedo se posso ridurre la frazione, in questo caso no, il risultato è $+\frac{13}{30}$
- **Sommare i numeri razionali** $-0,2-1,2+25\%+\frac{7}{12}$

Trasformo i numeri razionali in frazioni: $-\frac{2}{10}-\frac{12-1}{9}+\frac{25}{100}+\frac{7}{12} = -\frac{1}{5}-\frac{11}{9}+\frac{1}{4}+\frac{7}{12}$

$mcm(5,9,4,12)=180$

$$\frac{-1 \cdot (180:5) - 11 \cdot (180:9) + 1 \cdot (180:4) + 7 \cdot (180:12)}{180} = \frac{-1 \cdot 36 - 11 \cdot 20 + 1 \cdot 45 + 7 \cdot 15}{180}$$

$$\frac{-36 - 220 + 45 + 105}{180} = \frac{-106}{180} = \frac{-53}{90}$$



3.4 Moltiplicazione

Il prodotto di due frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

$$\begin{array}{c} \frac{m}{n} \\ \frac{p}{q} \end{array} \longrightarrow \boxed{\cdot} \longrightarrow \frac{mp}{nq}$$



3.5 Divisione

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Dato che nell'insieme dei numeri razionali esiste sempre l'inverso di una frazione rispetto alla moltiplicazione, esclusa la frazione zero, si può sempre eseguire la divisione di due qualsiasi frazioni:

$$\begin{array}{c} \frac{m}{n} \\ \frac{p}{q} \end{array} \longrightarrow \boxed{:} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}} \longrightarrow \boxed{\cdot} \longrightarrow \frac{mq}{np}$$

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}$$

La divisione di due frazioni è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima frazione per l'inverso della seconda frazione.

Esempi

- $\frac{2}{3} : \frac{7}{4}$ il reciproco di $\frac{7}{4}$ è $\frac{4}{7}$ pertanto $\frac{2}{3} : \frac{7}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$
- $-\frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{4}\right)$ il reciproco di $-\frac{3}{4}$ è $-\frac{4}{3}$ pertanto $-\frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = +\frac{8}{9}$
- $\frac{2}{3} : 0$ il reciproco di 0 non esiste quindi la divisione non è eseguibile.
- $0 : \frac{2}{3}$ il reciproco di $\frac{2}{3}$ è $\frac{3}{2}$ pertanto $0 : \frac{2}{3} = 0 \cdot \frac{3}{2} = 0$

Applichiamo le operazioni ad una espressione numerica e ricordiamo il grafico di pagina 8.

Esempio n°1

$$\left\{ \frac{3}{20} \times \left[\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3} \right) : 5 + \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{5} \right) : \frac{1}{14} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{9} \right] + \frac{2}{15} \right\} : 2 =$$

$$= \left\{ \frac{3}{20} \times \left[\left(\frac{4-3}{9} \right) : 5 + \left(\frac{15-14}{35} \right) : \frac{1}{14} + \frac{1}{45} \right] + \frac{2}{15} \right\} : 2 =$$

$$= \left\{ \frac{3}{20} \times \left[\frac{1}{9} : 5 + \frac{1}{35} : \frac{1}{14} + \frac{1}{45} \right] + \frac{2}{15} \right\} : 2 = \left\{ \frac{3}{20} \times \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{35} \cdot \frac{14}{1} + \frac{1}{45} \right] + \frac{2}{15} \right\} : 2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{3}{20} \times \left[\frac{1}{45} + \frac{1}{35^5} \cdot \frac{14^2}{1} + \frac{1}{45} \right] + \frac{2}{15} \right\} : 2 = \left\{ \frac{3}{20} \times \left[\frac{1}{45} + \frac{2}{5} + \frac{1}{45} \right] + \frac{2}{15} \right\} : 2 = \\
&= \left\{ \frac{3}{20} \times \left[\frac{1+18+1}{45} \right] + \frac{2}{15} \right\} : 2 = \left\{ \frac{3}{20} \times \left[\frac{20^4}{45^9} \right] + \frac{2}{15} \right\} : 2 = \left\{ \frac{3}{20} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{15} \right\} : 2 = \\
&= \left\{ \frac{3^1}{20^5} \times \frac{4^1}{9^3} + \frac{2}{15} \right\} : 2 = \left\{ \frac{1}{15} + \frac{2}{15} \right\} : 2 = \frac{3^1}{15^5} : 2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Esempio n°2

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{13}{5} : \left(3 + \frac{9}{10} \right) + \frac{7}{8} + \left(\frac{13}{4} - 2 \right) \times \frac{4}{15} - \frac{7}{8} \right] \times \frac{11}{3} : \left(6 - \frac{1}{2} \right) = \\
&= \left[\frac{13}{5} : \left(\frac{30+9}{10} \right) + \frac{7}{8} + \left(\frac{13-8}{4} \right) \times \frac{4}{15} - \frac{7}{8} \right] \times \frac{11}{3} : \left(\frac{12-1}{2} \right) = \\
&= \left[\frac{13}{5} : \frac{39}{10} + \frac{7}{8} + \frac{5}{4} \times \frac{4}{15} - \frac{7}{8} \right] \times \frac{11}{3} : \frac{11}{2} = \\
&= \left[\frac{13}{5} \times \frac{10}{39} + \frac{7}{8} + \frac{5^1}{4^1} \times \frac{4^1}{15^3} - \frac{7}{8} \right] \times \frac{11}{3} \times \frac{2}{11} = \\
&= \left[\frac{13^1}{5^1} \times \frac{10^2}{39^3} + \frac{7}{8} + \frac{1}{3} - \frac{7}{8} \right] \times \frac{11}{3} \times \frac{2}{11} = \\
&= \left[\frac{2}{3} + \frac{7}{8} + \frac{1}{3} - \frac{7}{8} \right] \times \frac{11^1}{3} \times \frac{2}{11^1} = \\
&= \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right] \times \frac{2}{3} = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$



3.6 Potenza di una frazione

Come per ogni numero, anche per le frazioni, la potenza di una frazione non è altro che un prodotto di tante frazioni identiche alla frazione data quanto è il valore dell'esponente, pertanto si trova elevando il numeratore e il denominatore della frazione all'esponente della potenza.

Esempi

$$\bullet \quad \left(-\frac{2}{3} \right)^3 = -\frac{8}{27} \qquad \bullet \quad -\frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3} \qquad \bullet \quad \left(-\frac{2}{3} \right)^2 = +\frac{4}{9}$$

Potenza con esponente uguale a zero

La definizione di potenza si estende anche al caso in cui l'esponente è zero.

Consideriamo l'esempio della divisione di due potenze con la stessa base e con lo stesso esponente:

$a^n : a^n = 1$ la divisione di due numeri uguali è 1.

$a^n : a^n = a^0$ applicando le proprietà delle potenze.

Possiamo allora concludere che per ogni frazione o numero razionale a diverso da zero $a^0=1$. Non è invece possibile la potenza 0^0 .

Potenza con esponente un numero intero negativo La definizione di potenza si può estendere anche al caso in cui l'esponente sia uguale a un numero intero negativo:

$$a^{-n} = a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a} \right)^n$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a} \right)^n$$

Si può definire allora per ogni numero razionale diverso da zero $\frac{1}{a}$, quindi la potenza di un numero diverso da zero elevato a un esponente intero negativo è uguale a una potenza che ha per base il reciproco della base rispetto alla moltiplicazione e per esponente l'opposto dell'esponente rispetto all'addizione.

Osservazioni: Non è definita invece la potenza con esponente negativo di 0, il numero 0 infatti non ha il reciproco.



3.7 Problemi con le frazioni

Problemi diretti

Nei problemi diretti si conosce il valore di una grandezza e se ne deve calcolare la parte che corrisponde a una frazione. In questo caso basta moltiplicare la frazione per la grandezza intera.

Esempio

Una pasticceria produce 568 cornetti a settimana: i $\frac{3}{4}$ sono alla crema, $\frac{1}{8}$ sono al cioccolato e $\frac{1}{8}$ alla marmellata. Quanti cornetti di ciascun tipo produce?

Per risolvere il problema occorre calcolare la parte che corrisponde a ciascuna frazione:

$$\text{Cornetti alla crema: } \frac{3}{4} \cdot 568 = 426$$

$$\text{Cornetti al cioccolato: } \frac{1}{8} \cdot 568 = 71$$

Cornetti alla marmellata: 71.

Problemi inversi

Nei problemi inversi si conosce il valore numerico di una frazione di una certa grandezza si deve calcolare il valore dell'intera grandezza. In questo caso occorre dividere il valore numerico dato per la frazione, si ottiene così l'intero.

Esempio

Mario ha speso 21€ che corrispondono a $\frac{3}{5}$ della somma che possedeva. Quanto possedeva?

In questo problema si sa che 21€ corrispondono ai $\frac{3}{5}$ della somma da cercare. E' sufficiente dividere 21 per la frazione:

$$21 \text{ €} : \frac{3}{5} = 21 \text{ €} \cdot \frac{5}{3} = 35 \text{ €}$$

Esempio

Giuseppe possiede 150 euro. Se spende i $\frac{3}{5}$ della somma e poi i $\frac{2}{3}$ della rimanente, quanto gli rimane?

Per risolvere il problema si può procedere in più modi:

$$1) \text{ Calcoliamo prima i } \frac{3}{5} \text{ di } 150, \text{ cioè } \frac{3}{5} \cdot 150 \text{ €} = 90 \text{ €}$$

Quindi la prima volta Giuseppe spende 90 €, perciò gliene rimangono 60. La seconda volta spende i $\frac{2}{3}$ di

$$60 \text{ €, cioè } \frac{2}{3} \cdot 60 \text{ €} = 40 \text{ €}$$

. In tutto ha speso $90 \text{ €} + 40 \text{ €} = 130 \text{ €}$, gli rimangono 20€.

2) Un altro modo per risolvere il problema è tenere conto che, se la prima volta ha speso i $\frac{3}{5}$ della somma

che possedeva, significa che gli rimane la frazione $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. La seconda volta spende i

$\frac{2}{3}$ dei $\frac{2}{5}$, cioè $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$. In tutto ha speso la frazione $\frac{3}{5} + \frac{4}{15} = \frac{3 \cdot 3 + 4}{15} = \frac{13}{15}$, gli

rimane perciò la frazione $\frac{2}{15}$, pertanto gli rimangono $\frac{2}{15} \cdot 150 \text{ €} = 20 \text{ €}$

Problemi con le percentuali

Per calcolare la percentuale di una grandezza è sufficiente moltiplicare il valore della grandezza per la percentuale espressa in frazione.

Esempio

Degli 857 alunni di una scuola ne sono stati promossi il 95%. Quanti sono stati i promossi?

Per rispondere alla domanda si moltiplica il numero totale di alunni per la frazione 95/100.

$$\text{Precisamente } \frac{95}{100} \cdot 857 = 814,15$$

. Poiché il risultato non è un numero intero la percentuale è stata approssimata. Gli alunni promossi sono stati 814.

A volte è nota una parte della grandezza e si vuole conoscere che percentuale è la parte nota rispetto al totale.

In questo caso occorre dividere la parte nota per l'intera grandezza, moltiplicare il risultato per 100 ed esprimere il numero in percentuale.

Esempio

Di una scolaresca di 652 alunni ben 126 hanno avuto il debito in matematica. Qual è la percentuale di alunni che hanno avuto il debito in matematica?

Per rispondere alla domanda eseguiamo i seguenti calcoli $\frac{126}{652} \cdot 100\% \approx 0,19 \cdot 100\% = 19\%$

Problemi con gli sconti**Esempio**

Un pantalone costava 70€ e viene venduto con il 20% di sconto, a quanto viene venduto?

Si tratta di calcolare prima lo sconto e poi il prezzo scontato.

Lo sconto è dato da $20\% \cdot 70\text{€} = \frac{20}{100} \cdot 70\text{€} = 14\text{€}$

Il prezzo scontato è $70\text{€} - 14\text{€} = 56\text{€}$.

In alternativa si può tenere conto che, se 20% esprime lo sconto, la parte rimanente, quella da pagare, è $100\% - 20\% = 80\%$. Quindi per calcolare quanto costano i pantaloni scontati si può calcolare

$$80\% \cdot 70\text{€} = \frac{80}{100} \cdot 70\text{€} = 56\text{€}$$

Esempio

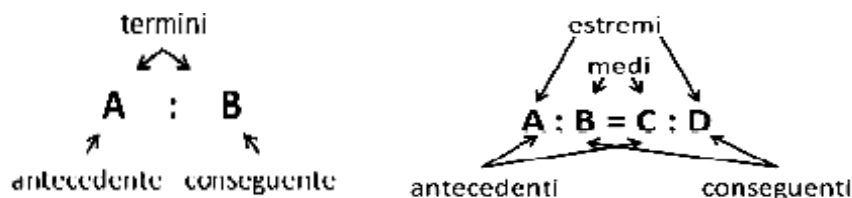
Un paio di scarpe da 120€ viene venduto scontato a 75€ Qual è stata la percentuale di sconto praticato?

Per rispondere alla domanda, calcolo lo sconto = $120\text{€} - 75\text{€} = 45\text{€}$.

Calcolo la percentuale che 45€ rappresentano di 120€, $\frac{45}{120} \cdot 100\% = 0,375 \cdot 100\% = 37,5\%$

**3.8 Proporzioni**

Il rapporto tra due numeri, di cui il secondo diverso da zero, è il quoziente che si ottiene dividendo il primo numero per il secondo. Il primo numero si dice **antecedente** ed il secondo **conseguente**



Una proporzione è una eguaglianza tra due rapporti, del tipo

$A : B = C : D$, che si legge: "A sta a B come C sta a D" con B e D diversi da zero.

Esempi

- $4 : 2 = 12 : 6$, formano una proporzione perché i due quozienti valgono entrambi 2.
- $7 : 14 = 16 : 4$, non formano una proporzione perché il primo rapporto vale 0.2 mentre il secondo vale 2.

Proprietà fondamentali delle proporzioni. In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

$$A : B = C : D \rightarrow A \cdot D = B \cdot C$$

Proprietà del permutare

$$A : B = C : D \rightarrow A : C = B : D \rightarrow D : B = C : A \rightarrow D : C = B : A$$

Proprietà dell'invertire

$$A : B = C : D \rightarrow B : A = D : C$$

Proprietà del comporre

$$A : B = C : D \rightarrow (A + B) : A = (C + D) : C$$

$$\text{Oppure} \rightarrow (A + B) : B = (C + D) : D$$

Proprietà dello scomporre

$$A : B = C : D \rightarrow (A - B) : A = (C - D) : C$$

$$\text{Oppure} \rightarrow (A - B) : B = (C - D) : D$$

Esempi

- $4 : 6 = 6 : 9$, il prodotto dei medi è $6 \cdot 6 = 36$ il prodotto degli estremi è $4 \cdot 9 = 36$, quindi è una proporzione.
- $20 : 30 = 30 : 40$, il prodotto dei medi è $30 \cdot 30 = 900$ il prodotto degli estremi è $20 \cdot 40 = 800$, quindi non è una proporzione.

Data la proporzione $12 : 16 = 18 : 24$

- scambiando tra di loro i medi si ottiene la proporzione $12 : 18 = 16 : 24$
- scambiando tra di loro gli estremi si ottiene la proporzione $24 : 16 = 18 : 12$
- scambiando tra di loro sia i medi sia gli estremi si ottiene la proporzione $24 : 18 = 16 : 12$

Data la proporzione $16 : 10 = 40 : 25$

applicando la proprietà del comporre si ottengono le proporzioni

$$26 : 16 = 65 : 40 \qquad 26 : 10 = 65 : 25$$

Data la proporzione $16 : 10 = 40 : 25$

applicando la proprietà dello scomporre si ottengono le proporzioni

$$6 : 16 = 15 : 40 \qquad 6 : 10 = 15 : 25$$

Calcolo di un medio o un estremo incognito

Il medio incognito di una proporzione si calcola moltiplicando gli estremi e dividendo per il medio noto:

$$a : b = x : d \rightarrow x = \frac{a \cdot d}{b}$$

L'estremo incognito di una proporzione si calcola moltiplicando i medi e dividendo per l'estremo noto:

$$x : b = c : d \rightarrow x = \frac{b \cdot c}{d}$$

DEF.: Una proporzione si dice **continua** se ha i medi uguali. $A : B = B : C$

Calcolo del medio in una proporzione continua

In una proporzione continua il medio proporzionale incognito si ottiene moltiplicando gli estremi e calcolando la radice quadrata del prodotto ottenuto.

$$a : x = x : d \rightarrow x = \sqrt{a \cdot d}$$

Calcolo di un termine incognito per mezzo delle proprietà del comporre e dello scomporre

Esempi

- $(11-x) : x = 15 : 5$ applicando la proprietà del comporre si ha la proporzione $(11-x+x) : x = (15+5) : 5$

da cui $11 : x = 20 : 5$ da cui si ricava $x = \frac{11 \cdot 5}{20} = \frac{11}{4}$.

- $\left(\frac{1}{2} + x\right) : \frac{5}{8} = x : 5$ permutando i medi si ha $\left(\frac{1}{2} + x\right) : x = \frac{5}{8} : 5$ applicando la proprietà dello

scomporre si ha $\left(\frac{1}{2} + x - x\right) : x = \left(\frac{5}{8} - 5\right) : 5$ eseguendo le operazioni nelle parentesi si ha

$$\frac{1}{2} : x = \frac{-35}{8} : 5 \quad \text{da cui} \quad x = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(\frac{-35}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(-\frac{8}{35}\right) = -\frac{4}{7}$$

Grandezze direttamente e inversamente proporzionali

Si consideri il perimetro di un triangolo equilatero; sappiamo che esso varia al variare della lunghezza del suo lato. Se si indica con l la lunghezza del lato del triangolo, allora il perimetro è dato dalla relazione: $2p=3l$.

È possibile notare che se raddoppia il lato, raddoppia anche il perimetro; se si triplica il lato, allora triplica anche il perimetro etc

Lato l	0,5	1	1,5	2,4	3,1	4,4
Perimetro $2p$	1,5	3	4,5	7,2	9,3	13,2
Rapporto $\frac{2p}{l}$	3	3	3	3	3	3

Viceversa. Se quando vai a fare benzina allo scooter chiedi ogni volta 10 € di benzina, noterai che se aumenta il prezzo della benzina diminuirà la quantità di carburante che ricevi e viceversa se diminuisce il prezzo aumenterà la quantità di carburante che ricevi. Ciò che rimane costante è il prodotto tra il prezzo della benzina e la quantità di benzina ricevuta che deve essere sempre 10 €.

Prezzo benzina al litro p	1,126€	1,156€	1,212€	1,248€
Benzina ricevuta b	8,881 l	8,650 l	8,251 l	8,013 l
Costo $c = p \cdot b$	€ 10,00	€ 10,00	€ 10,00	€ 10,00



- 1 Da un cartoncino rettangolare quadrettato di lati rispettivamente 5 unità e 8 unità viene ritagliata la forma colorata in grigio, come mostrato nella figura.

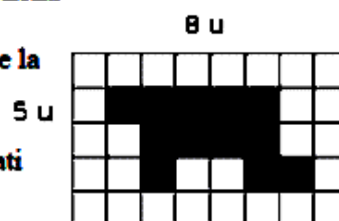
Quale delle seguenti espressioni ti sembra più corretta per esprimere la relazione tra il cartoncino e la forma ritagliata?

[A] "La forma ottenuta è più piccola del cartoncino."

[B] "La forma ottenuta è un poligono con un numero maggiore di lati rispetto al cartoncino dato."

[C] "La forma ottenuta rappresenta i $\frac{12}{40}$ del cartoncino."

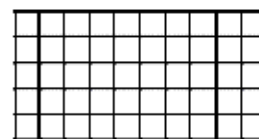
Sbaglio se affermo che la parte colorata è i $\frac{3}{10}$ del cartoncino?



- 2 Il monte-premi di una lotteria è di 50.000 €; il primo premio è di 25.000 €, il secondo di 10.000 €, il terzo di 5.000 €, il quarto di 4.000 €, il quinto e il sesto premio sono uguali.

Nella figura un quadretto rappresenta 1.000 €

- Colora con colori diversi i quadretti quanti servono per rappresentare i sei premi, un colore per ogni premio.
- Quale parte del monte-premi è stata incassata da chi ha vinto il secondo premio? Esprimi questa parte con una frazione.
- Marco ha vinto il sesto premio: quanto ha vinto?

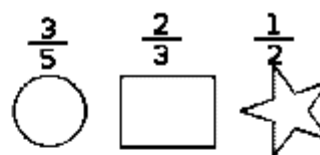


- 3 La figura seguente è composta da 11 quadratini, alcuni bianchi altri grigi. Completa:

La figura è divisa in due parti mediante la colorazione: la parte grigia rappresenta dell'intera figura, mentre la parte bianca ne è



- 4 Di ciascuna figura colora la parte indicata dalla frazione



- 5 Indica se queste frazioni sono proprie [P], improprie [I] o apparenti [A]

a) $\frac{3}{4}$ [P] [I] [A] c) $\frac{12}{3}$ [P] [I] [A] e) $\frac{5}{3}$ [P] [I] [A]

b) $\frac{8}{3}$ [P] [I] [A] d) $\frac{5}{2}$ [P] [I] [A] f) $\frac{3}{2}$ [P] [I] [A]

- 6 Trova le frazioni equivalenti completando

a) $\frac{3}{4} = \frac{\dots}{12}$ b) $\frac{12}{16} = \frac{3}{\dots}$

c) $\frac{5}{2} = \frac{\dots}{10}$ d) $\frac{21}{35} = \frac{\dots}{5}$

- 7 Indica almeno tre frazioni equivalenti a ciascuna delle seguenti

$$\frac{5}{6} = \quad = \quad = \quad \frac{5}{2} = \quad = \quad =$$

$$\frac{3}{5} = \quad = \quad = \quad \frac{2}{3} = \quad = \quad =$$

$$\frac{12}{60} = \quad = \quad = \quad \frac{1}{2} = \quad = \quad =$$

- 8 Nella figura che segue il quadratino colorato rappresenta $\frac{1}{4}$ del quadrato grande; costruisci una figura che rappresenti $\frac{8}{4}$ del quadrato grande accostando opportunamente altri quadrati uguali



- 9 Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni

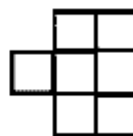
a) $\frac{4}{6}$ $\frac{8}{2}$ $\frac{2}{10}$ b) $\frac{80}{100}$ $\frac{8}{12}$ $\frac{9}{6}$

c) $\frac{16}{6}$ $\frac{18}{15}$ $\frac{20}{12}$ d) $\frac{27}{21}$ $\frac{28}{14}$ $\frac{30}{16}$

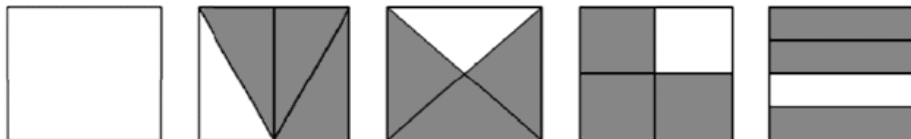
10 Si può dire che la parte colorata in grigio della figura corrisponde a $\frac{1}{5}$ della figura stessa?



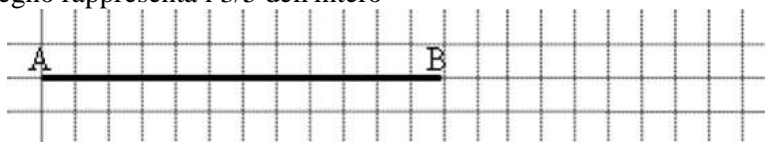
11 Costruisci una figura che corrisponde a $\frac{11}{6}$ della figura



12 Per ciascuno dei seguenti disegni la parte colorata in grigio rappresenta sempre la frazione $\frac{3}{4}$ del quadrato bianco?



13 Il segmento nel disegno rappresenta i $\frac{3}{5}$ dell'intero



Ti basta questa informazione per costruire l'intero? Come procederesti?

14 Disegna un segmento come grandezza unitaria e dimostra che la frazione $\frac{3}{5}$ è equivalente a $\frac{6}{10}$ ma non a $\frac{9}{25}$.

15 Usando una grandezza unitaria arbitraria, stabilisci quale delle seguenti frazioni rappresenta l'intero e quale un suo multiplo:

$$\frac{2}{4}, \frac{6}{3}, \frac{5}{5}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}$$

16 Raggruppa le seguenti frazioni in insiemi di frazioni equivalenti. Etichetta l'insieme con un numero razionale, prendendo per ogni gruppo la frazione ridotta ai minimi termini

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, -\frac{5}{2}, \frac{6}{-14}, \frac{-12}{4}, \frac{3}{6}, \frac{-3}{-9}, \frac{10}{-4}, \frac{10}{20}, \frac{-18}{42}, \frac{5}{15}, -\frac{9}{21}, -\frac{15}{6}, \frac{4}{12}$$

17 Riscrivi le seguenti frazioni improprie come somma di un numero naturale e una frazione propria

$$\frac{10}{3}, \frac{17}{9}, \frac{11}{2}, \frac{25}{3}, \frac{17}{10}, \frac{15}{6}$$

18 Senza eseguire le divisioni indica quali di queste frazioni possono essere scritte come numero decimale finito [DF], quali come numero decimale periodico [DP] e quali come numeri intero [I] :

a) $-\frac{3}{2}$ [DF] [DP] [I] e) $\frac{5}{6}$ [DF] [DP] [I]

b) $-\frac{6}{5}$ [DF] [DP] [I] f) $-\frac{5}{12}$ [DF] [DP] [I]

c) $\frac{2}{25}$ [DF] [DP] [I] g) $\frac{12}{6}$ [DF] [DP] [I]

d) $\frac{5}{8}$ [DF] [DP] [I] h) $\frac{5}{10}$ [DF] [DP] [I]

19 **Trasforma le seguenti frazioni in numeri decimali**

a) $\frac{13}{2} =$ c) $\frac{3}{5} =$ e) $\frac{17}{7} =$ g) $\frac{12}{9} =$ i) $\frac{122}{11} =$

b) $\frac{11}{3} =$ d) $\frac{15}{6} =$ f) $\frac{15}{8} =$ h) $\frac{127}{10} =$ j) $\frac{13}{12} =$

20 **Trasforma in frazioni i seguenti numeri decimali**

a) 12,5 d) 3,75 g) 100,100 j) 0,00100

b) 4,2 e) 12,33 h) 0,12 k) 100,001

c) 6,25 f) 1,135 i) 1,1030 l) 0,0001

21 **Trasforma i seguenti numeri decimali in frazioni.**

a) -1,25	g) -0,38	m) 0,08	s) 0,25
b) 0,03	h) $11,\overline{175}$	n) 0,2	t) $31,\overline{02}$
c) -2,7	i) $0,01\overline{02}$	o) 0,1	u) $0,\overline{21}$
d) $0,\overline{13}$	j) $0,12\overline{345}$	p) 0,03	v) 2,34
e) 5,080	k) $100,\overline{100}$	q) 23,5	w) $3,21\overline{8}$
f) $3,75\overline{2}$	l) $100,00\overline{1}$	r) $22,\overline{32}$	x) $0,03\overline{4}$

22 Trasforma i seguenti numeri percentuali in numeri decimali.

12%; 0,03%; 4,3%; 80%; 3,5%; -0,2% 15%; -0,38%

23 Trasforma i seguenti numeri decimali in percentuali.

-1,25; 0,03; -2,1; 0,13; 5,080; 3,752; -0,38

24 Trasforma i seguenti numeri percentuali in frazioni ridotte ai minimi termini.

12%; 0,03%; 4,3%; 80%; 3,5%; -0,2% 15%; -0,38%

25 Trasforma le seguenti frazioni in numeri percentuali.

$\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{2}{25}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{6}$, $-\frac{5}{12}$

26 Inserisci tra le seguenti coppie di numeri razionali i simboli di maggiore (>), minore (<) o uguale (=).

a) $\frac{4}{5} \dots \frac{5}{7}$; c) $-1 \dots \frac{1}{12}$; e) $\frac{1}{2} \dots -\frac{3}{4}$

b) $-\frac{9}{5} \dots -\frac{8}{3}$; d) $\frac{2}{7} \dots \frac{6}{21}$; f) $\frac{3}{5} \dots \frac{6}{9}$

27 Quale dei seguenti numeri razionali è il maggiore?

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{12}$

28 Quale dei seguenti numeri razionali è il minore?

$-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{5}$

29 Scrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) i seguenti numeri razionali.

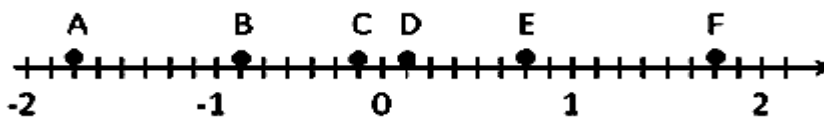
$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{2}{5}$, 0

30 Scrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo) i seguenti numeri razionali.

$\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $-\frac{6}{5}$, $\frac{2}{5}$, -1, $\frac{5}{2}$, 0

31 Rappresenta su una retta orientata, dopo aver scelto una opportuna unità di misura, i seguenti numeri razionali: $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{12}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{11}{6}$, $\frac{9}{4}$

32 Scrivi i numeri razionali rappresentati dai punti segnati sulla retta nella figura



33 Disegna su una retta orientata i seguenti numeri decimali: 0,6 2,3 -1,2 -0,06

34 Calcola le seguenti somme algebriche fra numeri razionali

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ e) $\frac{6}{5} + 0$ j) $\frac{5}{8} + \frac{5}{6}$ o) $3 - \frac{2}{3}$
 b) $\frac{7}{11} + \frac{1}{11}$ f) $-\frac{3}{2} + \frac{4}{3}$ k) $\frac{5}{6} - \frac{5}{12}$ p) $\frac{1}{5} - 1$
 c) $\frac{3}{2} - \frac{5}{2}$ g) $-\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ l) $1 - \frac{3}{2}$ q) $4 + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}$
 d) $\frac{8}{18} + \frac{5}{9}$ h) $\frac{4}{3} - \frac{6}{5}$ m) $\frac{11}{5} + 5$ r) $\frac{4}{3} + 3 - \frac{1}{2}$
 i) $\frac{2}{5} + \frac{5}{8}$ n) $\frac{7}{3} - \frac{6}{4}$

35 Completa la seguente tabella

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	-1,5	-5	-0,21
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	+2,3	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
a+b							
a-b							
b-a							
-a-b							
-a+b							

36 Calcola le seguenti somme algebriche fra numeri razionali.

a) $1,\bar{6} + \frac{2}{3}$

d) $0,1\bar{6} - 1,\bar{45}$

g) $-1,\bar{2} + 25\% + \frac{5}{18}$

b) $5,1 - 1,5$

e) $50\% + \frac{1}{2}$

h) $\frac{3}{2} - 13\% + 0,15$

c) $0,03 + \frac{0}{3}$

f) $\frac{2}{5} - 1,2 + 5\%$

i) $1,\bar{2} + 1,2 + \frac{1}{2} + 1,2\%$

37 Calcola i seguenti prodotti fra frazioni:

a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}$

c) $-\frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

e) $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$

b) $6 \cdot \frac{5}{2}$

d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9}$

f) $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{8}{9}\right) \cdot \frac{5}{6}$

38 Calcola i seguenti prodotti fra numeri razionali.

$-1,\bar{7} \cdot \frac{18}{5}$

$2\% \cdot 5\%$

$-\frac{3}{4} \cdot 1,4 \cdot (-120\%)$

39 Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	15%	$-1,\bar{6}$	$+\frac{17}{3}$	-0,21
b	$+\frac{7}{3}$		$-\frac{5}{2}$		$+2,\bar{3}$		$+\frac{5}{3}$
a · b		1		-1		0	

40 Calcola i seguenti quozienti fra frazioni

a) $\frac{3}{2} : \frac{4}{3}$

b) $-\frac{6}{5} : \left(-\frac{2}{3}\right)$

c) $\frac{2}{5} : \frac{5}{8} : \left(-\frac{5}{6}\right)$

Calcola i seguenti quozienti fra numeri razionali.

a) $-1,\bar{7} : \frac{18}{5}$

b) $2\% : 5\%$

c) $-\frac{3}{4} : 1,4 : (-120\%)$

41 Completa la seguente tabella

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	$1,\bar{6}$	-5	-0,21
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	$+2,\bar{3}$	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
a : b							
b : a							

42 Calcola il valore delle seguenti potenze

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

c) $\left(\frac{1}{2} - 1\right)^3$

e) $-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

g) $(-2)^4$

i) $-\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$

m) $(-2)^{-4}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

d) $\left(-\frac{3}{5}\right)^0$

f) -2^2

h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

l) -2^{-4}

n) $-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

43 Indica quali proprietà delle potenze sono state applicate nelle seguenti uguaglianze

a) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = -\frac{3^5}{2^5}$

c) $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^6 = +\frac{3^6}{2^6}$

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 : \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} = -\frac{2}{3}$

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 : \left(\frac{25}{10}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} : \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)^2 = 1^2$

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{25}\right)^2 = \left(-\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{25}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = +\frac{3^2}{5^2}$

44 La distanza Roma - Bari è di 450 km. Se ho percorso i $\frac{2}{5}$ del tragitto quanti chilometri mancano ancora da percorrere?

45 Completa la seguente tabella.

a	a^2	a^{-2}	$-a^2$	$(-a)^3$	a^{-1}	a^0	a^3
$-\frac{2}{3}$							
$-1,\bar{6}$							
-1							

46 Una persona possiede 525 euro. Se spende i $\frac{3}{5}$ della somma e poi i $\frac{2}{3}$ della rimanente, quale somma di denaro gli rimane?

47 Luigi ha 18 anni, cioè i $\frac{3}{7}$ dell'età di sua madre. Qual è l'età della madre?

48 Lucia ha letto $\frac{3}{5}$ di un libro, gli rimangono da leggere 120 pagine. Quante pagine ha il libro?

49 Verifica se i gruppi di numeri formano nell'ordine scritto una proporzione

a) $\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}$ c) 35; 7; 48; 6 d) 14; 3,5; 4; 1 e) $\frac{1}{5}; \frac{4}{3}; \frac{4}{27}; \frac{8}{9}$

50 Applica la proprietà fondamentale delle proporzioni per verificare quale delle seguenti scritte formano una proporzione:

a) $10 : 11 = 12 : 13$ [SI] [NO] d) $18 : 15 = 12 : 10$ [SI] [NO]

b) $7 : 14 = 21 : 42$ [SI] [NO] e) $10 : 6 = 5 : 3$ [SI] [NO]

c) $64 : 48 = 8 : 6$ [SI] [NO] f) $1,2 : 1,4 = 3,6 : 4,2$ [SI] [NO]

51 Disponi opportunamente i numeri in modo che formino una proporzione:

a) 7 5 20 28 d) 3 5 9 15

b) 8 3 2 12 e) 6 7 2 21

c) 5 6 2 15 f) 3 8 6 16

52 Completa la seguente tabella

1° termine	2° termine	antecedente	conseguente	rapporto	Rapporto inverso
32	8	32	8	$32:8=4$	$\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$
12	13				
$\frac{3}{5}$	3				
				$\frac{1}{4}:\frac{3}{2}$	
					$\frac{7}{10}=\frac{21}{4}$

53 Completa la seguente tabella

proporzione	antecedenti	conseguenti	medi	estremi	valore del rapporto
$3 : 5 = 21 : 35$	3, 21	5, 35	5, 21	3, 35	0,6
$54 : 12 = 36 : 8$					
$7 : 21 = 9 : 27$					
$\frac{5}{4} : \frac{15}{8} = 4 : 6$					

Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni:

54 $2 : 24 = 3 : x$ $x : 0,\bar{6} = 0,8 : 1,\bar{3}$ $\frac{7}{3} : x = \frac{4}{3} : \frac{8}{35}$

55 $\left(\frac{3}{20} + \frac{3}{8}\right) : x = \left(1 - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{11}{3} + \frac{1}{7}\right)$ $\left(1 - \frac{5}{12}\right) : \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) = x : \left(\frac{9}{8} - \frac{5}{8}\right)$

- 56 $\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) : \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\right) : x$ $\left(\frac{4}{5} + 1\right) : \left(3 - \frac{1}{5}\right) = x : \left(2 + \frac{1}{3}\right)$
- 57 $\left(\frac{5}{3} + \frac{8}{3} - 3\right) : x = x : \left(1 + \frac{5}{16} + \frac{3}{8}\right)$ $\left[\pm \frac{3}{2}\right]$
- 58 $\left\{\frac{5}{2} : \left[\frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{3} : \frac{5}{3} - \frac{14}{5}\right)\right]\right\} : x = x : \left\{\frac{3}{11} \left[\left(5 - \frac{3}{2}\right) \frac{2}{21} + \frac{3}{2}\right]\right\}$ $\left[\pm \frac{5}{2}\right]$
- 59 $(70 - x) : 6 = x : 8$ [40] $\left(\frac{5}{6} - x\right) : \left(1 - \frac{1}{2}\right) = x : \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)$ [25/48]
- 60 $x : y = 5 : 3$ con $x + y = 24$ [x=15; y=9]
- 61 $\left(6 + \frac{3}{5}\right) : y = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{15}\right) : x$ con $x + y = \frac{13}{4}$ [x=1/2; y=11/4]
- 62 $\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{20}\right) = x : y$ con $x - y = \frac{1}{3}$ [x=5/6; y=1/2]
- 63 $x : \frac{2}{7} = y : \frac{1}{2} = z : \frac{3}{14}$ con $x + y + z = \frac{1}{2}$ [x=1/7; y=1/4; z=3/28]
- 64 $\left\{\frac{3}{20} \times \left[\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) : 5 + \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{5}\right) : \frac{1}{14} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{9}\right] + \frac{2}{15}\right\} : 2$ $\left[\frac{1}{10}\right]$
- 65 $\left[\frac{13}{5} : \left(3 + \frac{9}{10}\right) + \frac{7}{8} + \left(\frac{13}{4} - 2\right) \times \frac{4}{15} - \frac{7}{8}\right] \times \frac{11}{3} : \left(6 - \frac{1}{2}\right)$ $\left[\frac{2}{3}\right]$
- 66 Esegui le seguenti operazioni con le frazioni
- a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ $\frac{2}{3} + 1$ $\frac{1}{2} + 1$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $2 - \frac{1}{2}$
- b) $\frac{2}{3} \cdot 0$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{0}$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{0}{2}$ $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$ $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$
- a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ $\frac{2}{3} : 0$ $\frac{2}{3} \cdot 1$ $\frac{2}{3} + 0$ $\frac{2}{3} - 0$ $1 : \frac{2}{3}$
- b) $1,6 : 1$ $\frac{1}{4} \cdot 4$ $1,5 : 1,5$ $0,3 : 3$ $\frac{1}{4} : 4$ $1,5 : 1,5$
- 67 Verifica le seguenti uguaglianze trovando la frazione generatrice
- $\frac{1,7}{1,3} = 1,3$ $\frac{2,7}{1,6} = 1,6$ $\frac{1,1\bar{6}}{2,3} = 0,5$ $\frac{2,3}{1,6} = 1,4$
- 68 Qual è la minore delle seguenti frazioni?
- [A] $\frac{2}{3}$ [B] $\frac{2}{7}$ [C] $\frac{3}{2}$ [D] $\frac{1}{2}$
- 69 Metti in ordine le seguenti frazioni $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{5}{3}$
- 70 Sottolinea le frazioni equivalenti a $\frac{3}{5}$ tra le seguenti $\frac{6}{10}$; $\frac{25}{100}$; $\frac{12}{10}$; $\frac{5}{25}$
- 71 Completa le seguenti uguaglianze
- a) $\frac{3}{5} = \frac{\dots}{10}$ b) $\frac{75}{10} = \frac{\dots}{100}$ c) $\frac{7}{\dots} = \frac{1}{2}$ d) $3 = \frac{24}{\dots}$
- 72 Perché $\frac{24}{18} = \frac{20}{15}$? Rispondi brevemente
- 73 Trasforma le seguenti frazioni in altre equivalenti aventi tutte lo stesso denominatore
- $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{5}{15}$; $\frac{14}{10}$

- 74 Scrivi una frazione molto vicina a $-\frac{2}{9}$
- 75 Scrivi una frazione compresa tra : a) $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ b) $\frac{5}{3}$ e $\frac{1}{7}$
- 76 Scrivi la frazione generatrice di $12,3\overline{45}$, qual è la 614-ma cifra decimale del numero?
- 77 Calcola $0,\overline{9}-3,\overline{9}$. Cosa osservi?
- 78 Completa
- $$\frac{3}{4} + \dots = 1 \qquad 1 - \dots = \frac{4}{13} \qquad \frac{11}{12} \cdot \dots = \frac{8}{55} \qquad \dots : \frac{5}{3} = \frac{3}{5}$$
- 79 Correggi le seguenti operazioni
- $$\frac{3}{4} + \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 2}{4 + 7} \qquad \frac{8}{25} - \frac{3}{10} = \frac{8-3}{50} \qquad 3 \cdot \frac{11}{13} = \frac{33}{39}$$
- 80 Trasforma i seguenti numeri decimali nelle frazioni corrispondenti
- a) 1,25 e) 1,7 i) 5,015
 b) 0,08 f) 1,46 j) 3,21
 c) 1,002 g) 0,13 k) 2,3
 d) 15,675 h) 0,149 l) 1,086
- 81 Trasforma in forma decimale i seguenti numeri scritti sotto forma di frazione
- a) $\frac{12}{5}$ d) $\frac{5}{8}$ g) $\frac{37}{18}$
 b) $\frac{13}{7}$ e) $\frac{32}{9}$ h) $\frac{2}{21}$
 c) $\frac{15}{4}$ f) $\frac{21}{20}$ i) $\frac{16}{5}$

82 Completa le seguenti tabelle:

		sottraendo				
minuendo	-	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{2}$	
	$\frac{10}{3}$					
	$\frac{23}{12}$					
	$\frac{13}{2}$					
	$\frac{9}{4}$					

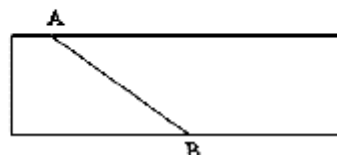
		Secondo fattore				
Primo fattore	x	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{4}$	
	$\frac{3}{4}$					
	$\frac{5}{2}$					
	$\frac{7}{3}$					
	$\frac{8}{5}$					

83 Riscrivi in simboli e motiva la verità o falsità di ciascuna proposizione

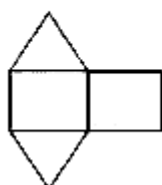
- a) Il triplo di un terzo è l'unità.
 b) La somma di un quinto con il doppio di un mezzo è sei quinti
 c) Un ottavo è maggiore di un quinto.

84 Relativamente alla figura a fianco, quale proposizione è vera?

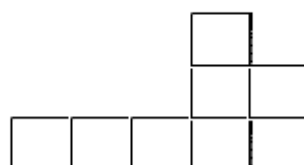
- Il segmento AB la divide in due parti uguali
- Il segmento AB la divide in due quadrilateri



85 La parte in grigio rappresenta $\frac{1}{4}$ della figura?



Costruisci una figura che sia $\frac{11}{6}$ della figura che segue:



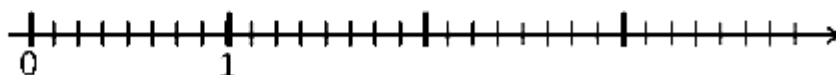
Colora $\frac{3}{4}$ della figura



86 Costruire la frazione $\frac{N}{D}$ significa dividere l'unità in ... parti uguali e prendere ... parti.

87 Rappresenta sulla opportuna retta numerica le seguenti frazioni:

$$\frac{3}{4}; \frac{3}{8}; \frac{1}{3}; \frac{5}{4}; \frac{2}{5}; \frac{6}{3}; \frac{5}{6}; \frac{12}{4}; \frac{19}{8}; \frac{16}{5}$$



88 Quale dei seguenti numeri è più vicino a 1? [A] 0,10 [B] 0,99
[C] 0,01 [D] 0,90

89 Quali disuguaglianze sono vere?

[A]	$-\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$	V	F	[B]	$+\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$	V	F
[C]	$-\frac{7}{6} > +\frac{6}{7}$	V	F	[D]	$+\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$	V	F
[E]	$-\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$	V	F	[F]	$+\frac{7}{6} > -\frac{6}{7}$	V	F

90 Quale dei seguenti numeri è più vicino alla frazione $\frac{1}{10}$?

[A] 0,01 [B] 0,90 [C] 1,01 [D] 0,19

Calcola il valore delle seguenti espressioni

91 $\left(-1 + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\right)$ $-\frac{2}{11}$

92 $\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)$ $\frac{1}{24}$

93 $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)$ $\frac{5}{6}$

94 $\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) + \frac{3}{2} - \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{7}{30} - \frac{4}{5}\right) + \frac{5}{6}\right]$ $-\frac{3}{20}$

95 $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{5} + \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{12}{7} - \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{6}\right]$ $-\frac{673}{1680}$

96 $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{5} - \frac{3}{4} : \left[\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right]$ $\frac{31}{3}$

97 $\frac{63}{55} \times \frac{44}{45} + \frac{14}{75} \times \frac{15}{35} + \frac{2}{25} \times 10 - \frac{16}{25} : \frac{3}{5} + \frac{1}{15}$ 1

98 $\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right] : \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$ $\frac{13}{5}$

99 $\frac{4}{5} - \frac{27}{7} \times \frac{1}{12} + \frac{8}{21} : \frac{8}{6} + \frac{13}{2} \times \frac{1}{7} - \frac{9}{14} + \frac{1}{7} - \frac{12}{25} : \frac{3}{5}$ $\frac{11}{28}$

100 $\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) \times \frac{7}{2} - \left(\frac{10}{18} - \frac{7}{15}\right) : \frac{2}{9}\right] : \frac{14}{15} \times \frac{1}{4} + 1$ $\frac{15}{14}$

101 $\left[\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{10}\right) : \frac{37}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\right]^2 : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^2\right]$ $\frac{1}{50}$

102 $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left[\left(\frac{2}{5}\right)^8 : \left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2\right] : \left[\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^4\right]$ 1

103 $1 - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 : \left(\frac{3}{2}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 : \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^3\right]$ $\frac{1}{6}$

89 Quali disuguaglianze sono vere?

[A]	$-\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$	V	F	[B]	$+\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$	V	F
[C]	$-\frac{7}{6} > +\frac{6}{7}$	V	F	[D]	$+\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$	V	F
[E]	$-\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$	V	F	[F]	$+\frac{7}{6} > -\frac{6}{7}$	V	F

90 Quale dei seguenti numeri è più vicino alla frazione $\frac{1}{10}$?

[A] 0,01

[B] 0,90

[C] 1,01

[D] 0,19

Calcola il valore delle seguenti espressioni

$$91 \quad \left(-1 + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\right) \quad \frac{2}{11}$$

$$92 \quad \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \quad \frac{1}{24}$$

$$93 \quad \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right) \quad \frac{5}{6}$$

$$94 \quad \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) + \frac{3}{2} - \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{7}{30} - \frac{4}{5}\right) + \frac{5}{6}\right] \quad -\frac{3}{20}$$

$$95 \quad \frac{5}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{5} + \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{12}{7} - \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{6}\right] \quad -\frac{673}{1680}$$

$$96 \quad \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{5} - \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right] \quad \frac{31}{3}$$

$$97 \quad \frac{63}{55} \times \frac{44}{45} + \frac{14}{75} \times \frac{15}{35} + \frac{2}{25} \times 10 - \frac{16}{25} : \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \quad 1$$

$$98 \quad \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right] : \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \quad \frac{13}{5}$$

$$99 \quad \frac{4}{5} - \frac{27}{7} \times \frac{1}{12} + \frac{8}{21} : \frac{8}{6} + \frac{13}{2} \times \frac{1}{7} - \frac{9}{14} + \frac{1}{7} - \frac{12}{25} : \frac{3}{5} \quad \frac{11}{28}$$

$$100 \quad \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) \times \frac{7}{2} - \left(\frac{10}{18} - \frac{7}{15}\right) : \frac{2}{9}\right] : \frac{14}{15} \times \frac{1}{4} + 1 \quad \frac{15}{14}$$

$$101 \quad \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{10}\right) : \frac{37}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\right] : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^2\right] \quad \frac{1}{50}$$

$$102 \quad \left\{\left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left[\left(\frac{2}{5}\right)^8 : \left(\frac{2}{5}\right)^{12}\right]\right\} : \left[\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^4\right] \quad 1$$

$$103 \quad 1 - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 : \left(\frac{3}{2}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 : \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^3\right] \quad \frac{1}{6}$$

$$104 \quad [0,1\bar{6} + (0,1\bar{3}\bar{6} + 0,41\bar{6} - 0,2\bar{2}\bar{7}) : 0,3\bar{9}\bar{0}] : [0,3\bar{6} + 2,25 \cdot (0,5 - 0,2\bar{7})] \quad 1$$

$$105 \quad \frac{1,6 - 0,5 \cdot (0,6 - 0,5) : (1 - 0,6)^2 - 0,7}{3 \cdot (1 - 0,5)^2 + 0,875 - (1 - 0,5)^2 : 0,2 - 0,6 \cdot 0,5} \quad 2$$

$$106 \quad 0,1\bar{6}^2 + [1,5 : 1,5^2 + (1,6 - 0,5) : (2 - 0,3) + (0,6 + 0,5 - 0,2) \cdot 0,75 : 5,8] \cdot 0,6 \quad 38/45$$

$$107 \quad \{0,8\bar{3} - [0,6 + (0,75 - 0,6^2 - (1 - 2,3 \cdot 0,25))]\} + 0,6 : 0,8 : 1,027 \quad 40/37$$

$$108 \quad \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} + \frac{1}{\sqrt{13^2 - 12^2}} - \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24}} \quad \frac{1}{15}$$

$$109 \quad \sqrt{20 - 2 \cdot (2 + 3) + (2 + 1) \cdot 5} + \sqrt{48 : 6 - 3 \cdot 2 + 10 : 5} \quad 7$$

$$110 \quad \sqrt{\frac{1}{9} \cdot \left\{\left[\frac{11}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\right] : \left[\left(2 - \frac{7}{4}\right) + \frac{10}{3}\right]\right\}} \quad \frac{1}{3}$$

$$111 \quad \sqrt{\left\{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] : \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) \cdot \frac{4}{5}\right] \cdot \frac{1}{4}\right\}^2 : \left(1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10}\right)^2} \quad \frac{7}{3}$$

112 Calcola il valore dell'espressione $E = A - B$, dove

$$A = \left(\left(\left(\left(-\frac{3}{7} \right)^4 \cdot \left(-\frac{7}{3} \right)^{-2} \right) \cdot \left(\frac{3}{7} \right)^{-1} \right)^{-2} \right) \quad B = \left(\left(\frac{3}{7} \right)^{-6} \cdot \left(1 - \frac{4}{7} \right)^5 \right)^2$$

113 L'età di Paolo è $\frac{5}{11}$ di quella della madre che ha 44 anni. Quanti anni ha Paolo? [20]

115 L'età di Marco è $\frac{1}{2}$ di quella di Paolo che è $\frac{1}{3}$ di quella del padre che ha 54 anni. Quanti anni ha Marco? [9]

116 $\frac{2}{5}$ del libro che stiamo leggendo è la parte più noiosa, le rimanenti 63 pagine sono invece le più avvincenti. Di quante pagine è formato il libro? [105]

118 In un terreno agricolo sono stati piantati ulivi e mandorli per 266 alberi complessivi. Se gli ulivi sono $\frac{4}{10}$ degli alberi di mandorle, quanti sono gli ulivi e i mandorli? [76; 190]

120 Gli alunni del primo e del secondo anno di una scuola media sono rispettivamente $\frac{3}{7}$ e $\frac{2}{7}$ del totale. Sapendo che gli alunni che frequentano la terza media sono 54, quanti sono tutti gli alunni della scuola? [189]

123 Al supermercato ho speso $\frac{7}{10}$ della somma di denaro che possedevo; successivamente ho incassato un credito uguale ai $\frac{13}{20}$ della somma iniziale e ho speso $\frac{2}{15}$ sempre della somma iniziale per un rifornimento di benzina. Sapendo che sono rimasto con 220,50 euro, quale somma di denaro possedevo inizialmente? [270]

Per l'esercitazione e l'approfondimento visita i siti:

- www.chiha.pauradellamatematica.org
- <http://www.matematicamente.it>

Usa questo spazio per formalizzare i tuoi problemi

114 Tre operai devono eseguire un lavoro. Il primo da solo lo farebbe in 12 giorni, il secondo in 18 giorni e il terzo in 36 giorni. Lavorando insieme, in quanti giorni potrebbero eseguire tutto il lavoro? [6]

117 Un collezionista vende $\frac{3}{7}$ della sua collezione di 385 pezzi. Quanti pezzi gli rimangono? [220]

119 Tre casse pesano complessivamente 220 kg; la seconda pesa $\frac{1}{2}$ della prima e la terza $\frac{1}{3}$ della seconda. Calcola il peso di ciascuna cassa.

[132; 66; 22]

121 Il prezzo di copertina di un libro è di 29 euro; quanto verrà pagato con uno sconto del 15%? [24,65]

122 In una fattoria ci sono vitelli, capre e animali da cortile per un totale di 75 capi. I vitelli rappresentano $\frac{2}{5}$ di tutti gli animali, mentre le capre sono $\frac{2}{3}$ degli animali da cortile. Quanti vitelli, capre e animali da cortile ci sono? [30, 18, 27]

124 Gino compra un'auto da 5.400 euro. Paga $\frac{4}{9}$ in contanti ed il resto in 5 rate. Qual è l'ammontare di ogni rata? A quale frazione corrisponde ogni rata?

[600 €; $\frac{1}{9}$]



4. NUMERI REALI ED IRRAZIONALI (CENNI)

La vita e l'opera di Pitagora hanno costituito oggetto di approfondite ricerche da parte degli storici di tutti i tempi. Nonostante le indagini più accurate, i fatti della vita di Pitagora realmente accertati sono veramente pochi. Si dice sia nato a Samo nel 572 a.C. (575 a.C. per altri autori) dove vi regnava il tiranno Policrate; non sopportando la tirannia, si trasferì in Egitto con un incarico di lavoro presso il faraone Amasi. Sembra che poi abbia viaggiato in Babilonia prima di approdare a Crotone dove fondò una Scuola che accolse numerosi discepoli. Pitagora propose un sistema matematico della natura: la spiegazione dei fenomeni naturali doveva avvenire attraverso la ricerca di relazioni tra numeri. Pensava che tutti i corpi fossero formati da punti materiali o monadi combinate in modo da formare le varie figure geometriche e il numero totale di tali unità rappresentava l'oggetto materiale. Da qui nasceva la dottrina secondo la quale tutte le cose che si conoscono hanno un numero; senza questo nulla sarebbe possibile pensare, né conoscere; la spiegazione dei fenomeni naturali può essere raggiunta solo attraverso l'aritmetica.

Per i pitagorici esistono due soli tipi di numeri: gli interi e le frazioni. Ogni numero aveva sia una rappresentazione simbolica che un significato simbolico: il numero 5 veniva assunto a rappresentare il matrimonio, essendo la somma del primo numero dispari, il 3, con il primo numero pari, il 2.

Fu dunque terribile la scoperta di un nuovo tipo di numero che non è né intero né frazionario, questo numero si ottiene calcolando per mezzo del teorema di Pitagora la misura della diagonale di un quadrato di lato uno.

Questo nuovo numero, che oggi scriviamo $\sqrt{2}$, non poteva essere espresso in nessun modo come frazione, cioè rapporto di numeri interi. Ad esso i pitagorici diedero il nome di **arretton**, cioè indicibile, inesprimibile. La scoperta fu mantenuta segreta. La leggenda narra che Ippaso, discepolo della Scuola, morì affogato perché violò il giuramento che aveva fatto di non diffondere questa terribile verità.

Oggi questi numeri li chiamiamo **numeri irrazionali**, termine che riflette la stessa idea di inesprimibilità attribuita loro dai pitagorici.



5. I SISTEMI DI NUMERAZIONE



5.1 La scrittura in base 10

Il nostro sistema di numerazione è il sistema decimale. Tutto ha probabilmente origine dal fatto che abbiamo 10 dita. Forse se fossimo nati ragni avremmo contato fino ad otto ed useremo un sistema di numerazione ottale, se fossimo nati gatti avremmo contato fino a 4 e useremo un sistema quatttrale, millepiedi fino a mille.

Come conta un computer? Un computer capisce solo due stati: passa corrente o non passa corrente: è come se avesse due dita.

Per ricordare e rappresentare un numero in antichità si usava uno strumento chiamato abaco. Gli abachi erano tavolette suddivise in colonne su cui si incidevano segni o si mettevano sassolini.

In generale, il valore dei numeri è diverso a seconda della posizione delle sue cifre. Il sistema di numerazione che solitamente usiamo è dunque un **sistema posizionale**: è chiamato decimale o a base dieci perché dieci unità di un determinato ordine formano un'unità di ordine superiore.

In generale, il valore dei numeri è diverso a seconda della posizione delle sue cifre. Il sistema di numerazione che solitamente usiamo è dunque un sistema posizionale: è chiamato **decimale o a base dieci** perché dieci unità di un determinato ordine formano un'unità di ordine superiore.

Riassumendo, abbiamo una serie di dieci simboli: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Il significato dei simboli dipende dalla posizione che assumono nella "parola" che rappresenta un numero.

Ad esempio: $1846 = 1 \cdot (1000) + 8 \cdot (100) + 4 \cdot (10) + 6 \cdot 1$

In particolare, scritto con le potenze del 10: $1846 = 1 \cdot (10)^3 + 8 \cdot (10)^2 + 4 \cdot (10)^1 + 6 \cdot (10)^0$.

Se il numero è indicato come somma delle cifre per le potenze della base la scrittura si chiama **notazione polinomiale**



5.2 Scrittura di un numero in una base qualsiasi

Esempio

Convertire nel sistema binario (in base 2) il numero 59. Il sistema binario prevede solo le cifre 0 e 1.

Dividiamo successivamente 59 per 2 fino a che non otteniamo zero come quoziente e prendiamo come risultato della conversione la successione dei resti partendo dall'ultimo.

Successive divisioni per 2 di 59	Quozienti delle successive divisioni per 2	Resti delle successive divisioni per 2
59 : 2	29	1
29 : 2	14	1
14 : 2	7	0
7 : 2	3	1
3 : 2	1	1
1 : 2	0	1

59 scritto in base 2 sarà $(111011)_2$

Verifichiamo con la scrittura polinomiale

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$

$$32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 59$$

$(111011)_2$

Analogamente si può trasformare un numero in una qualsiasi base .

Convertire nel sistema in base 3 il numero 59 (il sistema prevede le cifre 0, 1 e 2)

Successive divisioni per 2 di 59	Quozienti delle successive divisioni per 2	Resti delle successive divisioni per 2
59 : 2	29	1
29 : 2	14	1
14 : 2	7	0
7 : 2	3	1
3 : 2	1	1
1 : 2	0	1

59 scritto in base 3 sarà $(2012)_3$

Verifichiamo con la scrittura polinomiale

$$2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 59$$

$(2012)_3$



5-Esercizi

I SISTEMI DI NUMERAZIONE

- Scrivi il numero $(3411)_5$ in forma polinomiale e trova il corrispondente numero decimale
 $(3411)_5 = 3 \cdot 5^3 + \dots + 5^2 + 1 \cdot 5^1 + \dots = 375 + \dots + 5 + \dots = \dots$
- Trasforma i seguenti numeri scritti in base diversa da 10 in un numero decimale
 $(11101)_2$; $(2001)_3$; $(3023)_4$; $(41)_5$; $(3005)_6$ [29, 55, 203, 21, 653]
- Trasforma i seguenti numeri scritti in base 2 in un numero decimale
 $(110111)_2$; $(1001)_2$; $(111)_2$; $(111111)_2$; $(101)_2$ [55; 9; 7; 63; 5]
- Trasforma i seguenti numeri scritti in base 16 in un numero decimale
 $(20F)_{16}$; $(AA)_{16}$; $(19)_{16}$; $(3E)_{16}$ [527; 170; 25; 62]
- Scrivere in base 2 i seguenti numeri in base dieci: 2 4 15 12 27 33
Risultati [...; $(100)_2$; ...; $(1100)_2$; ...; $(100001)_2$]
- Scrivere in base 3 i seguenti numeri: 2 4 15 12 27 33
Risultati [$(2)_3$; $(\dots)_3$; $(120)_3$; $(\dots)_3$; $(1000)_3$; $(\dots)_3$]
- Scrivere in base 4 i seguenti numeri: 2 4 15 12 27 33
Risultati [$(\dots)_4$; $(10)_4$; $(33)_4$; $(\dots)_4$; $(\dots)_4$; $(201)_4$]
- Scrivere in base 5 i seguenti numeri: 2 4 15 12 27 33
Risultati [$(2)_5$; $(\dots)_5$; $(\dots)_5$; $(22)_5$; $(\dots)_5$; $(113)_5$]
- Scrivere in base 6 i seguenti numeri: 2 4 15 12 27 33
Risultati [$(\dots)_6$; $(4)_6$; $(\dots)_6$; $(20)_6$; $(\dots)_6$; $(\dots)_6$]
- Scrivere in base 7 i seguenti numeri decimali: 2 4 15 12 27 33
Risultati [$(2)_7$; $(\dots)_7$; $(\dots)_7$; $(\dots)_7$; $(\dots)_7$; $(45)_7$]
- Scrivere in base 8 i seguenti numeri: 2 4 15 12 27 33
Risultati [$(\dots)_8$; $(\dots)_8$; $(17)_8$; $(\dots)_8$; $(33)_8$; $(\dots)_8$]

Per l'esercitazione e l'approfondimento visita i siti:

- www.chiha.pauradellamatematica.org
- <http://www.matematicamente.it>