

MARIOLINA CAPPADONNA

CORSO DI MATEMATICA

Per il primo biennio

Algebra 2



EDITORE ULRICO HOEPLI MILANO

INDICE

Presentazione IX

1 Calcolo letterale (2^a parte)

1 Frazioni algebriche 2

1.1 Monomi frazionari 2

1.2 Elevamento a potenza, avente per esponente un numero relativo, di un monomio 3

1.3 Frazioni algebriche 5

2 Operazioni con le frazioni algebriche 8

2.1 Minimo comune multiplo di più monomi interi 8

2.2 Minimo comune multiplo di più polinomi 9

2.3 Operazioni con le frazioni algebriche 10

2.4 Espressioni contenenti frazioni algebriche 14

ESERCIZI

Sapere 15

Saper fare 17

Riepilogativi 29

RECUPERO 32

2 I radicali

1 Radicali 44

1.1 Radicali numerici e letterali 44

1.2 Condizioni di esistenza di un radicale letterale 44

1.3 Operazioni con i radicali 45

1.4 Espressioni irrazionali 56

1.5 Razionalizzazione del denominatore di una frazione 56

1.6 Radicali quadratici doppi 59

2 Semplici equazioni numeriche di primo grado contenenti coefficienti irrazionali 60

3 Semplici sistemi di equazioni numeriche di primo grado contenenti coefficienti irrazionali 60

ESERCIZI

Sapere 62

Saper fare 63

Riepilogativi 89

RECUPERO 99

3 Equazioni di secondo grado in una sola incognita

1	Equazioni numeriche intere di secondo grado	124
1.1	Equazioni numeriche intere di secondo grado monomie	125
1.2	Equazioni numeriche intere di secondo grado pure	125
1.3	Equazioni numeriche intere di secondo grado spurie	127
1.4	Equazioni numeriche intere di secondo grado complete	128
1.5	Formula risolutiva ridotta di un'equazione numerica intera completa di secondo grado	131
1.6	Relazioni tra i coefficienti e le soluzioni di un'equazione numerica intera di secondo grado determinata in R	132
1.7	Scomposizione di un trinomio completo di secondo grado	133

2	Problemi di secondo grado in una sola incognita	135
----------	--	-----

3	Regola di Cartesio	136
----------	---------------------------	-----

ESERCIZI

Sapere	140
Saper fare	143
Riepilogativi	161

RECUPERO	168
-----------------	-----

4 Equazioni di grado superiore al secondo

1	Equazioni di grado superiore al secondo	180
1.1	Equazioni numeriche intere di grado superiore al secondo	180
1.2	Equazioni numeriche intere di grado superiore al secondo riconducibili a più equazioni di grado inferiore mediante scomposizione	180

1.3	Equazioni numeriche intere monomie	182
1.4	Equazioni numeriche intere binomie	182
1.5	Equazioni numeriche intere trinomie	184
1.6	Equazioni reciproche	185

ESERCIZI

Sapere	187
Saper fare	188
Riepilogativi	197

RECUPERO	199
-----------------	-----

5 Equazioni frazionarie

1	Equazioni numeriche frazionarie	206
1.1	Principi di equivalenza e loro conseguenze	206
1.2	Risoluzione di un'equazione numerica frazionaria	207

2	Equazioni di quarto grado reciproche di prima specie	209
----------	---	-----

ESERCIZI

Sapere	212
Saper fare	213
Riepilogativi	222

RECUPERO	224
-----------------	-----

6 Sistemi di equazioni

1	Sistemi di equazioni di secondo grado	230
1.1	Sistemi numerici interi di secondo grado in due incognite	230
1.2	Sistemi simmetrici	233
2	Sistemi numerici interi di grado superiore al secondo	234



3 Sistemi numerici frazionari 237

ESERCIZI

Sapere	239
Saper fare	240
Riepilogativi	257

RECUPERO	266
-----------------	------------

7 Disequazioni numeriche intere di primo grado

1 Disuguaglianze e loro proprietà	276
--	------------

2 Disequazioni	277
-----------------------	------------

2.1 Classificazione delle disequazioni	277
--	-----

2.2 Risoluzione di una disequazione	278
-------------------------------------	-----

2.3 Disequazioni equivalenti e principi di equivalenza delle disequazioni	278
---	-----

2.4 Grado di una disequazione	279
-------------------------------	-----

2.5 Ricerca delle soluzioni di una disequazione numerica intera di primo grado in una sola incognita	280
--	-----

ESERCIZI

Sapere	286
Saper fare	288
Riepilogativi	297

RECUPERO	298
-----------------	------------

8 Disequazioni numeriche intere di grado superiore al primo

1 Disequazioni numeriche intere di secondo grado	304
---	------------

2 Disequazioni di grado superiore al primo risolubili con il metodo della scomposizione	311
--	------------

ESERCIZI

Sapere	314
Saper fare	315
Riepilogativi	324

RECUPERO	327
-----------------	------------

9 Disequazioni frazionarie

1 Disequazioni numeriche frazionarie	336
---	------------

ESERCIZI

Sapere	340
Saper fare	341
Riepilogativi	347

RECUPERO	348
-----------------	------------

10 Sistemi di disequazioni

1 Sistemi di disequazioni nella stessa incognita	354
---	------------

ESERCIZI

Sapere	359
Saper fare	359
Riepilogativi	368

RECUPERO	371
-----------------	------------

11 Semplici equazioni e disequazioni con valore assoluto

1 Equazioni con valore assoluto in una sola incognita	376
--	------------

2 Disequazioni con valore assoluto in una sola incognita	377
---	------------

ESERCIZI

Sapere	379
Saper fare	379
Riepilogativi	381

12 Semplici equazioni e disequazioni letterali

1	Equazioni letterali	384
1.1	Equazioni letterali in una sola incognita	384
1.2	Risoluzione di un'equazione letterale intera di primo grado in una sola incognita	384
1.3	Risoluzione di un'equazione letterale intera di secondo grado in una sola incognita	386
1.4	Risoluzione di un'equazione letterale frazionaria in una sola incognita	390
2	Disequazioni letterali	391
2.1	Disequazioni letterali in una sola incognita	391
2.2	Risoluzione di una disequazione letterale intera di primo grado in una sola incognita	391
ESERCIZI		
	Sapere	393
	Saper fare	394
	Riepilogativi	405

13 Cenni di probabilità e statistica

1	Cenni di calcolo delle probabilità	410
1.1	Introduzione	410
1.2	Operazioni logiche fra eventi	410
1.3	Frequenza di un evento	413
1.4	Probabilità di un evento	414
1.5	Differenza tra frequenza e probabilità	415
1.6	Teoremi sul calcolo delle probabilità	416
2	Cenni di statistica	419
2.1	Introduzione	419
2.2	Rappresentazioni grafiche	419
ESERCIZI		
	Sapere	425
	Saper fare	427
	Riepilogativi	437
Esercizi per le prove PISA		443

Il libro di testo è uno strumento didattico principalmente rivolto agli studenti ma, contemporaneamente, deve rispondere in modo completo alle richieste di tipo metodologico del docente che intende usarlo.

Questo *Corso di matematica* tiene conto sia delle segnalazioni e delle informazioni pervenute nel corso degli anni da studenti e docenti di matematica, sia dell'esperienza didattica maturata nella quotidianità dell'insegnamento.

L'impostazione metodologica dell'opera presenta sfaccettature particolari e innovative. Aspetti originali sono ravvisabili nell'anticipazione, rispetto alla loro trattazione approfondita, di alcuni concetti o temi, sia perché utilizzati come strumenti propedeutici di quelli successivi, sia al fine di facilitare il loro apprendimento (come, per esempio, risolvere semplici equazioni di primo grado già dal capitolo dei numeri naturali), nel ricorso a schemi, grafici, figure geometriche o tabelle per risolvere esercizi proposti, nell'utilizzo dei numeri "sotto il segno di radice" sin dal primo capitolo sui numeri, nell'utilizzo di concetti e nelle trattazioni di temi spesso dimenticati dai libri della scuola media superiore (per esempio le operazioni con i numeri decimali, i problemi contenenti cambiamenti di unità di misura, le percentuali, gli sconti, le formule inverse).

Tutto questo tenendo sempre ben presente che è lo studente il soggetto al centro del lavoro di tutti i giorni e che l'obiettivo principale e costante deve essere il ***creare successi didattici***.

Il *Corso di matematica* è suddiviso in tre volumi: *Algebra 1*, *Algebra 2* e *Geometria* ed è rivolto agli studenti del primo biennio dei licei e degli istituti tecnici. I tre volumi percorrono infatti tutti i temi di matematica previsti dalle linee ministeriali per i primi due anni. Le nozioni sono presentate con linguaggio chiaro e conciso, tuttavia rigoroso come richiede la disciplina, e sono sempre accompagnate da esempi esplicativi.

Nei due volumi di algebra, dopo la trattazione di alcuni argomenti già noti agli studenti, viene dato ampio spazio agli insiemi numerici, al linguaggio algebrico, alle applicazioni in ambito algebrico, non solo prettamente orientate in ambito matematico, ma anche verso contesti più generali. All'interno dei due volumi vengono infatti proposti problemi di **Matematica pratica**, problemi e compiti che ogni studente può incontrare nella vita di tutti i giorni e in cui è necessario applicare principi e ragionamenti matematici. Essi hanno l'obiettivo di disabituare i giovani a risolvere solo problemi di tipologia classica (dato x , calcola y) e puntano a sviluppare la capacità degli studenti di utilizzare le loro conoscenze per affrontare compiti e prove di vita quotidiana.



Il volume di geometria fornisce la trattazione completa della geometria euclidea (piana e solida) ed è corredato di molte figure esemplificative nonché di dimostrazioni guidate, al fine di accompagnare lo studente nell'applicazione dei teoremi appresi a casi concreti. Le dimostrazioni di teoremi presenti nel volume solo in forma enunciativa sono fornite nella guida per il docente.

Marco ha ricevuto un sacchetto con 495 caramelle, 110 al limone e 385 all'arancia. Marco non riesce a dividere le caramelle in più sacchetti in modo che tutti i sacchetti contengano la stessa composizione di caramelle al limone e all'arancia e, inoltre, che tutte le caramelle vengano utilizzate. Quali è la soluzione del problema di Marco?

Il problema è risolvibile mediante l'applicazione del MCD. Il numero di sacchetti deve essere un divisore comune di 110 e di 385:

$$110 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \quad 385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$$

per cui MCD(110, 385) = 5 · 11 = 55. Ciascuno dei 55 sacchetti dovrà contenere 495 : 55 = 9 caramelle in tutto. Il dirigente scolastico e i suoi stretti collaboratori si riuniscono ogni 14 giorni, i docenti ogni 16 giorni e il personale non docente ogni 24 giorni. Se oggi le tre categorie si sono riunite, tra quanto si riuniranno nello stesso giorno?

Il problema si risolve con l'aiuto del mcm infatti, la risposta al quesito è il più piccolo multiplo comune tra 14, 16 e 24, ossia:

$$\text{mcm}(14, 16, 24) = 336$$

Risolvere i seguenti problemi con l'aiuto del MCD e del mcm

262 Una lavanderessa possiede tre lavabiancheria. Una deve essere revisionata tra 30 giorni, un'altra tra 15 giorni e la terza tra 20 giorni. Oggi sono state revisionate tutte e tre. Tra quanto tempo ricapiterà la revisione contemporanea?

263 Quattro colleghi di lavoro si recano nella filiale della loro azienda con le seguenti modalità:

- il primo ogni cinque giorni;
- il secondo ogni quindici giorni;
- il terzo ogni venti giorni;
- il quarto ogni venticinque giorni.

Oggi si sono ritrovati tutti insieme nella filiale. Tra quanto tempo si ritroveranno ancora tutti e quattro nella filiale?

264 Una parte di corridoio ricco della casa di Giulia è un quadrilatero avente i lati lunghi rispettivamente 200 cm, 120 cm, 130 cm, 150 cm. Giulia vuole illuminarlo con dei faretti, in modo che all'inizio e alla fine di ogni lato del corridoio ce ne sia sempre uno e che, inoltre, la distanza tra due faretti consecutivi sia costante sui quattro lati e la più grande fra tutte le possibilità. A quale distanza deve installare i faretti? Quanti faretti saranno necessari?

[10 cm; 60]

265 Paolo deve riporre in una cassetta 15 paia di calzini neri, 25 paia di calzini grigi e 20 paia blu. Se li vuole riporre in modo da occupare il maggior numero possibile di cassette e che in ognuno di esse vi siano tre tipi diversi di calzini e lo stesso numero di paia per colore, di quanti cassetti deve disporre? Quante paia di calzini di ciascun colore saranno riposti in ogni cassetto?

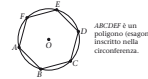
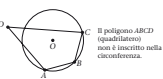
[5; 3; 5; assai elementari in N]

In fondo ai volumi di algebra è presente la sezione **Esercizi per le prove PISA**, esercizi strutturati e costruiti secondo i criteri di indagine e valutazione su cui si basano le prove OCSE-PISA che hanno l'obiettivo di sviluppare la capacità degli studenti di misurare le proprie scelte e di prendere decisioni mediante l'applicazione, a contesti extrascolastici, di quanto viene da loro appreso a scuola.


Il primo volume di algebra contiene anche una panoramica sull'**evoluzione storica dei numeri**, dall'antichità fino ai giorni nostri.

CAPITOLO 1
1.1 Poligoni inscritti in una circonferenza

DEFINIZIONE
Un poligono avente tutti i vertici su una circonferenza prende il nome di poligono **inscritto** nella circonferenza. Una circonferenza che contiene un poligono in essa inscritto prende il nome di circonferenza **circoscritta** al poligono.

Se tutti i vertici di un poligono sono punti di una semicirconferenza e uno dei lati del poligono è il diametro della semicirconferenza, il poligono si dice **inscritto nella semicirconferenza**.



DEFINIZIONE
Un poligono è **inscrittibile** in una circonferenza quando esiste una circonferenza passante per tutti i suoi vertici.

Se gli assi dei lati di un poligono si intersecano in uno stesso punto allora il poligono è **inscrittibile** in una circonferenza.

1.2 Poligoni inscrittibili

Un triangolo qualsiasi è sempre inscrittibile.

Il punto di intersezione degli assi dei lati di un poligono inscritto in una circonferenza è il centro della circonferenza circoscritta. Sia ABC un triangolo qualsiasi. **Ipotesi:** ABC è un triangolo qualsiasi. **Tesi:** ABC è inscrittibile. **Dimostrazione:** Il circocentro di un triangolo qualsiasi è equidistante dai tre vertici quindi la circonferenza avente per raggio tale distanza è circoscritta al triangolo. Tale circonferenza è unica poiché per tre punti non allineati (i

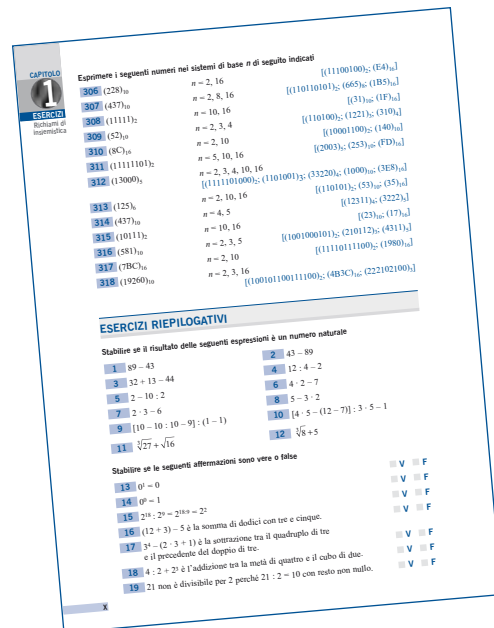
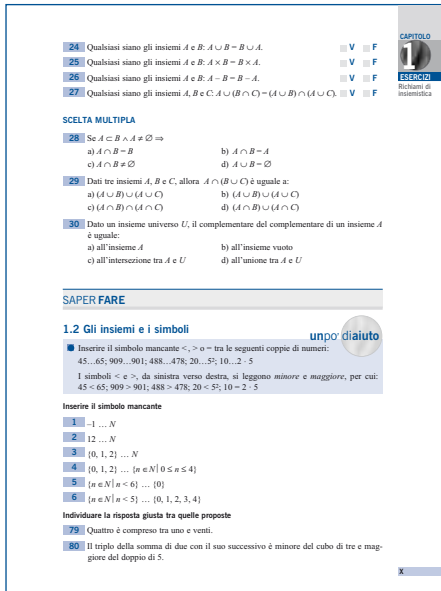


I testi propongono un elevato numero di esercizi, articolati secondo la scansione dei capitoli, dei paragrafi e dei sottoparagrafi. Gli esercizi sono suddivisi in tre tipologie: **Sapere**, **Saper fare** e **Riepilogativi**.

Gli esercizi del *Sapere* (completa, rispondi, vero/falso, scelta multipla) sono prove di tipo cognitivo e possono essere svolti in classe, con la guida del docente, o in modo autonomo a casa. In entrambi i casi permettono allo studente di gestire attivamente il processo di apprendimento e l'acquisizione delle conoscenze, di memorizzare quanto appreso durante la spiegazione, di utilizzare correttamente il linguaggio matematico.

Gli esercizi del *Saper fare* (completa, scelta multipla, vero/falso, domande aperte) consentono di applicare le conoscenze acquisite nonché di verificare l'avanzamento del proprio processo formativo. Ogni gruppo di esercizi è introdotto da **Un po' di aiuto**, una raccolta di esempi risolti e commentati, creata al fine di aiutare lo studente a gestire autonomamente la propria capacità risolutiva.

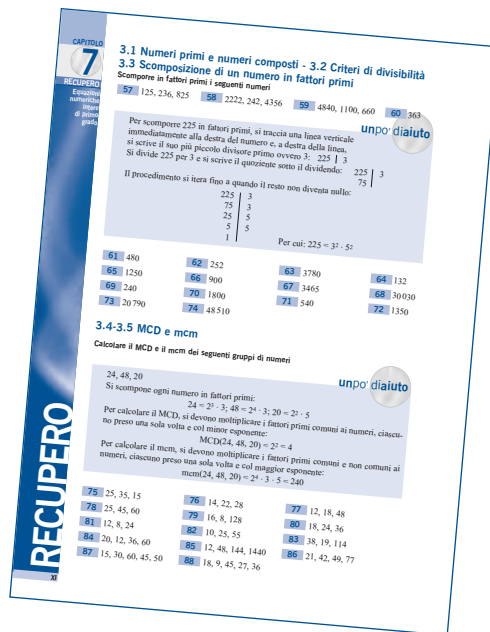
Gli esercizi *Riepilogativi* sono collocati in fondo a ogni capitolo e offrono un concreto aiuto nel processo di consolidamento e di rafforzamento delle conoscenze nonché nell'acquisizione di una preparazione adeguata prima di una verifica sommativa.



Algebra 1 e Algebra 2 contengono, alla fine di alcuni capitoli, delle sezioni di **recupero**.

Ogni sezione di recupero segue la struttura dei capitoli cui si riferisce. È infatti corredata di un ripasso teorico, di esercizi del *Sapere*, del *Saper fare* e *Riepilogativi* e costituisce un valido strumento per colmare le lacune eventualmente create nella preparazione di base degli studenti.

Le sezioni di recupero possono essere di grande aiuto anche per consolidare e rafforzare quanto già appreso.



Nelle pagine web:

www.hoepliditore.it/4432-0 (per i volumi di algebra) e www.hoepliditore.it/4431-3

(per il volume di geometria) i contenuti dei volumi sono integrati da:

- **laboratorio di matematica con Excel e con Derive** per i capitoli di algebra;
- **due capitoli di geometria analitica di base, con laboratorio Excel-Derive;**
- **ulteriori esercizi per ogni capitolo;**
- **lezioni di ripasso** di argomenti di Algebra 1, propedeutici al programma di Algebra 2;
- **esercizi di matematica in lingua inglese** basati sull'approccio metodologico CLIL;
- **laboratorio di geometria con GeoGebra** per i capitoli di geometria;
- un excursus dei momenti significativi del **pensiero matematico** fino ai giorni nostri.

In una sezione riservata al docente sono disponibili online per ogni capitolo ulteriori verifiche da somministrare in classe, con la possibilità di avere, tramite software di riordino, una ventina di prove differenti per ciascuna batteria di esercizi, nonché la traduzione dei quesiti e delle letture in inglese proposti nella sezione CLIL Math.

Ciascuno dei tre volumi del *Corso di matematica* è corredata di una *Guida per il docente* contenente al suo interno tutti i risultati degli esercizi e dei problemi proposti nel testo. Nella guida relativa al volume di geometria sono fornite anche le dimostrazioni della maggior parte dei teoremi dei quali è presente nel testo solo la forma enunciata. Nelle guide relative ai volumi di algebra il docente avrà a disposizione ulteriori verifiche di algebra per diversi capitoli. Alcune pagine descrivono le modalità di svolgimento e il tipo di preparazione richiesto per le prove OCSE-PISA.

MARIOLINA CAPPADONNA

Disequazioni frazionarie

CAPITOLO

9

SAPERE

Al termine di questo capitolo, avrai appreso:

- la definizione di disequazione frazionaria
- i diversi tipi di disequazioni

SAPER FARE

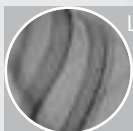
Al termine di questo capitolo, sarai in grado di:

- distinguere un'equazione da una disequazione
- distinguere una disuguaglianza numerica da una disequazione
- riconoscere e risolvere una disequazione numerica frazionaria

Risorse **online**



Laboratorio con
EXCEL



Laboratorio con
DERIVE



ESERCIZI



**CLIL
Math**

1 Disequazioni numeriche frazionarie

Una disequazione numerica in una sola incognita si dice **frazionaria** se l'incognita compare in almeno uno dei denominatori presenti nella disequazione.

Una disequazione frazionaria, dopo aver individuato il suo dominio, aver eseguito le eventuali operazioni in essa contenute, nel rispetto dei tre principi di equivalenza, e ridotto entrambi

entrambi i membri allo stesso denominatore, può essere ricondotta alla forma: $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ o $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$.

Risolvere una disequazione di questo tipo significa studiare il segno della frazione algebrica $\frac{P(x)}{Q(x)}$ e questo, com'è noto, è dato dal prodotto del segno del numeratore per il segno del denominatore.

Per far ciò, è necessario seguire la seguente procedura:

1. studiare separatamente il segno del numeratore e il segno del denominatore;
2. schematizzare entrambi i segni e precisamente:
 - rappresentare sulla retta reale tutti i valori di x che annullano sia il numeratore, sia il denominatore; se nella disequazione è presente anche il simbolo di uguaglianza, si traccia un cerchio • *pieno* in corrispondenza del valore che annulla il numeratore; in tutti gli altri casi, si traccia un cerchio ◦ *vuoto*;
 - tracciare due linee parallele alla retta reale, una corrispondente al segno del numeratore e l'altra a quello del denominatore, che sarà un tratto continuo, negli intervalli in cui ciascun termine della frazione assume segno positivo, e non continuo, negli intervalli in cui assume segno negativo;
3. applicare la regola del segno di un prodotto (procedendo con la moltiplicazione in "verticale", rispetto al lettore), individuando così l'insieme S delle soluzioni.

Se la disequazione di partenza assume la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, allora S è costituito dai valori reali corrispondenti agli intervalli in cui nella schematizzazione del segno del prodotto è presente il segno "+"; altrimenti è costituito da quelli corrispondenti agli intervalli in cui nella schematizzazione è presente il segno "-".

CASI PARTICOLARI

- Se una disequazione assume la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ e nella schematizzazione dei segni è presente solo il segno negativo o, viceversa, se la disequazione assume la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ e nella schematizzazione dei segni è presente solo il segno positivo, evidentemente l'insieme delle soluzioni è vuoto: $S = \emptyset$.
- Se nella schematizzazione dei segni è presente solo il segno indicato dal testo, nessun valore reale escluso, allora $S = R$.

A prescindere dal verso della disequazione di partenza, quando si studiano separatamente il segno del numeratore e il segno del denominatore, al fine di utilizzare una procedura comune, si è soliti studiare solo il segno positivo, ponendo maggiore di 0 sia il numerato-

re, sia il denominatore. Se il verso della disequazione contiene anche il simbolo di uguaglianza, si pone maggiore o uguale a 0 solo il numeratore (il denominatore non può assumere valore nullo).

Gli esempi che seguono esemplificano le considerazioni operate nel presente paragrafo.

esempio

Risolvere le seguenti disequazioni frazionarie:

- $\frac{4x-8}{6x-2} > 0$

Il dominio della frazione algebrica è $D = \{\forall x \in R \mid 6x - 2 \neq 0\} = \{\forall x \in R \mid x \neq \frac{1}{3}\}$.

Non ci sono operazioni da eseguire. Il segno della frazione dipende dal segno del suo numeratore e dal segno del suo denominatore, per cui è necessario studiarli separatamente. Si indichi con N il numeratore e con D il denominatore:

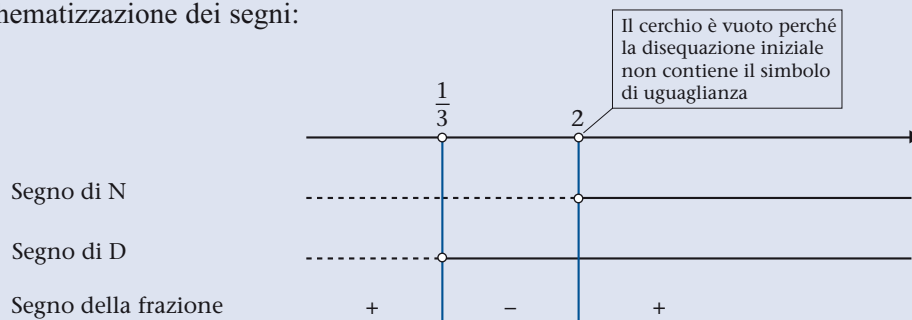
Studio del segno di N.

$4x - 8 > 0 \Rightarrow x > 2$. N assume segno positivo se a x si attribuiscono valori maggiori di 2; N assume segno negativo se a x si attribuiscono valori minori di 2; N si annulla se $x = 2$.

Studio del segno di D.

$$6x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}.$$

Schematizzazione dei segni:



Se si esamina la schematizzazione dei segni, si deduce che l'insieme delle soluzioni

della disequazione di partenza è: $S = \left\{ \forall x \in R \mid x < \frac{1}{3} \vee x > 2 \right\} = \left(-\infty, \frac{1}{3} \right) \cup (2, +\infty)$.

- $\frac{5x-1}{x^2-25} \leq 0$

Il dominio della frazione algebrica è l'insieme:

$$D = \{\forall x \in R \mid x^2 - 25 \neq 0\} = \{\forall x \in R \mid x \neq \pm 5\}$$

Non ci sono operazioni da eseguire.

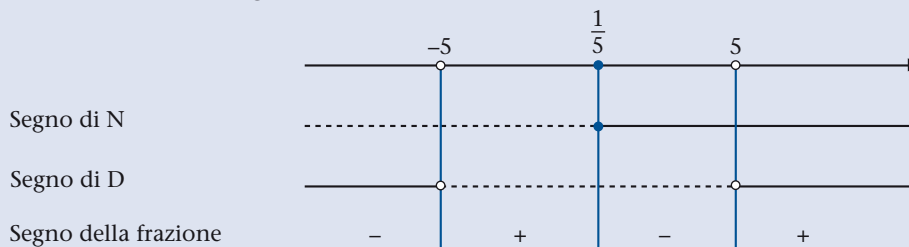
Studio del segno di N.

$$5x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{5}$$

Studio del segno di D.

$$x^2 - 25 > 0 \Rightarrow x < -5 \vee x > 5$$

Schematizzazione dei segni:



L'insieme delle soluzioni è quindi dato da:

$$S = \{\forall x \in R \mid x < -5 \vee \frac{1}{5} \leq x < 5\} = (-\infty, -5) \cup \left[\frac{1}{5}, 5\right)$$

(la parentesi è tonda in corrispondenza dei valori esclusi dal dominio; è quadra in corrispondenza del valore che annulla il numeratore e che non è escluso dal dominio).

- $\frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 5x + 2} > 0$

Il dominio della frazione algebrica è l'insieme:

$$D = \{\forall x \in R \mid 3x^2 - 5x + 2 \neq 0\} = \{\forall x \in R \mid x \neq \frac{2}{3}, x \neq 1\}.$$

Non ci sono operazioni da eseguire.

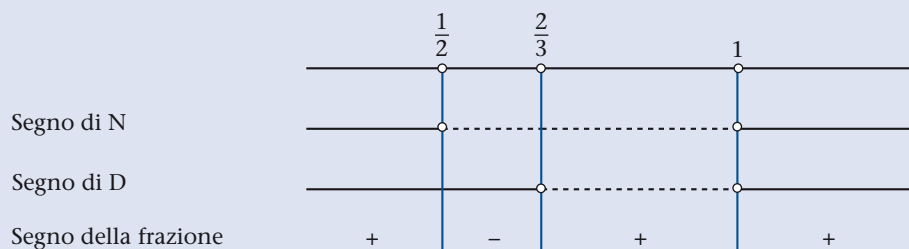
Studio del segno di N.

$$2x^2 - 3x + 1 > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \vee x > 1$$

Studio del segno di D.

$$3x^2 - 5x + 2 > 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3} \vee x > 1$$

Schematizzazione dei segni:



$$S = \left\{ \forall x \in R \mid x < \frac{1}{2} \vee \frac{2}{3} < x < 1 \vee x > 1 \right\} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$$

- $\frac{3+x}{x^2+x} + \frac{3-x}{x^2-2x+1} \leq 0$

È necessario ricondurre la disequazione alla forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$. Se si scompongono i denominatori, si ottiene:

$$\frac{3+x}{x(x+1)} + \frac{3-x}{(x-1)^2} \leq 0. D = \{\forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, x \neq -1, x \neq 1\}.$$

$$\frac{(3+x)(x-1)^2 + x(x+1)(3-x)}{x(x+1)(x-1)^2} \leq 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{3x^2 - 2x + 3}{x(x+1)(x-1)^2} \leq 0$$

Studio del segno di N.

$3x^2 - 2x + 3 \geq 0$. $\Delta < 0$. Il trinomio non si annulla mai ed è positivo $\forall x \in \mathbb{R}$.

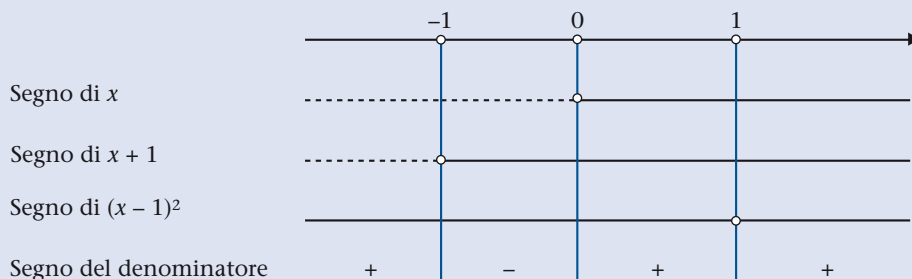
Studio del segno di D.

$x(x+1)(x-1)^2 > 0$. Per studiare il segno del polinomio, non conviene eseguire le moltiplicazioni, ma avvalersi della scomposizione già presente studiando il segno di ciascun fattore:

1° fattore: $x > 0$

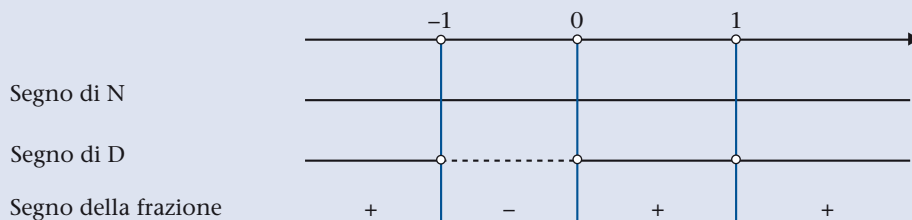
2° fattore: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

3° fattore: $(x - 1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1$ (per $x = 1$ il binomio $x - 1$ si annulla).



Il denominatore è quindi positivo $\forall x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee 0 < x < 1 \vee x > 1$, mentre è negativo $\forall x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0$.

Ora è possibile schematizzare il segno di N e di D per individuare il segno della frazione e trovare, così, l'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza:



$$S = \{\forall x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\} = (-1, 0).$$

SAPERE

COMPLETA

- 1** Una disequazione numerica in una sola incognita si dice frazionaria se
- 2** Risolvere la disequazione $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ significa
- 3** L'insieme delle soluzioni di una disequazione frazionaria, se nella schematizzazione del prodotto dei segni è presente solo il segno indicato dal testo, nessun valore reale escluso, è uguale a

SCELTA MULTIPLA

- 4** Una disequazione numerica in una sola incognita si dice frazionaria se:
- l'incognita compare in tutti i denominatori presenti nella disequazione
 - l'incognita compare in almeno uno dei denominatori presenti nella disequazione
 - l'incognita non compare in nessun denominatore presente nella disequazione
 - l'incognita compare in almeno uno dei numeratori presenti nella disequazione
- 5** L'insieme delle soluzioni di una disequazione frazionaria verificata da tutti i valori reali è:
- $(-\infty, +\infty)$
 - $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
 - $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
- 6** L'insieme delle soluzioni di una disequazione frazionaria verificata da nessun valore reale è:
- $(-\infty, +\infty)$
 - $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - \emptyset
 - R
- 7** L'insieme delle soluzioni di una disequazione frazionaria verificata da tutti i valori reali escluso il numero 1 è:
- $[-\infty, 1] \cup [1, +\infty]$
 - $[-\infty, 1) \cup (1, +\infty]$
 - $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
 - $(-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$

VERO/FALSO

- 8** Il segno di $\frac{P(x)}{Q(x)}$ coincide con il segno di $P(x)$. V F
- 9** Nella schematizzazione dei segni, un tratto continuo corrisponde al segno negativo. V F
- 10** Se nella schematizzazione dei segni è presente solo il segno opposto a quello indicato dal testo allora $S = \emptyset$. V F

SAPER FARE

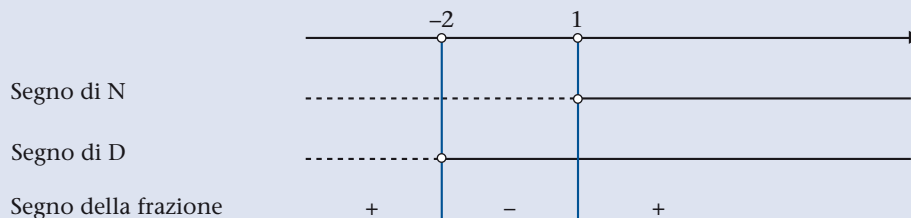
unpo' diaiuto

$$\blacksquare \frac{x-1}{x+2} < 0$$

Studio del segno del numeratore N (si ricorda che si è stabilito di porre sia N, sia D maggiori di 0): $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

Studio del segno del denominatore D: $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$

Schematizzazione dei segni:



Dalla schematizzazione dei segni, si deduce che l'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza è uguale all'insieme: $S = \{\forall x \in R \mid -2 < x < 1\} = (-2, 1)$.

Risolvere in R o in un suo sottoinsieme le seguenti disequazioni frazionarie (la cui risoluzione è riconducibile alla risoluzione di disequazioni di primo grado)

$$1 \quad \frac{1}{x} > 0$$

$$[x > 0]$$

$$2 \quad -\frac{3}{x} > 0$$

$$[x < 0]$$

$$3 \quad 0 < \frac{5}{x}$$

$$[x > 0]$$

$$4 \quad \frac{10}{x} \geq 0$$

$$[x > 0]$$

$$5 \quad \frac{x-3}{x-4} > 0$$

$$[x < 3 \vee x > 4]$$

$$6 \quad \frac{x+5}{x+6} < 0$$

$$[-6 < x < -5]$$

$$7 \quad \frac{x+2}{x} \leq 0$$

$$[-2 \leq x < 0]$$

$$8 \quad \frac{x}{x-7} \geq 0$$

$$[x \leq 0 \vee x > 7]$$

$$9 \quad \frac{2x-3}{14x-7} < 0$$

$$\left[\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right]$$

$$10 \quad \frac{5x-10}{7x-21} > 0$$

$$[x < 2 \vee x > 3]$$

$$11 \quad \frac{9x-18}{x-2} \leq 0$$

$$[S = \emptyset]$$

$$12 \quad \frac{1}{x} > 1$$

$$[0 < x < 1]$$

$$13 \quad \frac{1}{x} < -2$$

$$\left[-\frac{1}{2} < x < 0\right]$$

$$14 \quad \frac{1}{x} \geq 5$$

$$\left[0 < x \leq \frac{1}{5}\right]$$

$$15 \quad \frac{2}{x-1} > 1$$

$$[1 < x < 3]$$

$$16 \quad \frac{2x}{x+1} < -2$$

$$\left[-1 < x < -\frac{1}{2}\right]$$

$$17 \quad \frac{x-3}{x} > 6$$

$$\left[-\frac{3}{5} < x < 0\right]$$

$$18 \quad \frac{x-1}{2-x} \leq 1$$

$$\left[x \leq \frac{3}{2} \vee x > 2\right]$$

$$19 \quad \frac{x+2}{6-x} \geq 2$$

$$\left[\frac{10}{3} \leq x < 6\right]$$

$$20 \quad \frac{5x-8}{2-6x} > -1$$

$$\left[x < -6 \vee x > \frac{1}{3}\right]$$

$$21 \quad \frac{5x-25}{6x-12} \leq 2$$

$$\left[x \leq -\frac{1}{7} \vee x > 2\right]$$

$$22 \quad \frac{5x}{x+2} \geq 1$$

$$\left[x < -2 \vee x \geq \frac{1}{2}\right]$$

$$23 \quad -\frac{x}{x+1} < 3 \quad \left[x < -1 \vee x > -\frac{3}{4} \right]$$

$$24 \quad 4 - \frac{2x}{x-1} > 0 \quad [x < 1 \vee x > 2]$$

$$25 \quad \frac{x}{2x+1} + 5 < 0 \quad \left[-\frac{1}{2} < x < -\frac{5}{11} \right]$$

$$26 \quad \frac{x}{1-x} < \frac{2x}{x-1} \quad [x < 0 \vee x > 1]$$

$$27 \quad \frac{x-5}{1+x} < \frac{1-2x}{x+1} + 2 \quad [-1 < x < 8]$$

$$28 \quad \frac{2x-3}{2-x} \geq \frac{3-x}{x-2} - 1 \quad [x < 2]$$

$$29 \quad \frac{x-3}{2-4x} - \frac{1+2x}{1-2x} - 4 \leq 0$$

$$\left[x < \frac{1}{2} \vee x \geq 1 \right]$$

$$30 \quad \frac{x}{x-3} + 1 < \frac{2x+3}{x-3}$$

$$[x > 3]$$

$$31 \quad \frac{3-4x}{x-3} - 1 < \frac{2x+3}{x-3}$$

$$\left[x < \frac{3}{7} \vee x > 3 \right]$$

$$32 \quad \frac{x+4}{x-2} < \frac{5x+1}{3x-6}$$

$$\left[x < 2 \vee x > \frac{11}{2} \right]$$

$$33 \quad \frac{1-2x}{x+4} - 3 < \frac{2x+1}{2x+8}$$

$$\left[x < -4 \vee x > -\frac{23}{12} \right]$$

$$34 \quad \frac{4x}{2x+6} \geq \frac{x-1}{x+3} + 2$$

$$[-5 \leq x < -3]$$

$$35 \quad \frac{x}{x-5} \leq \frac{x-1}{2x-10} - 1$$

$$[3 \leq x < 5]$$

$$36 \quad \frac{2x}{2x+4} - 1 \leq \frac{5x-10}{3x+6} - 4$$

$$[-4 \leq x < -2]$$

$$37 \quad \frac{2x}{16x-4} - \frac{x-3}{4x-1} \leq 1 - \frac{4}{8x-2}$$

$$\left[x < \frac{1}{4} \vee x \geq \frac{4}{3} \right]$$

$$38 \quad \frac{x}{6x+2} + 3 > -\left(\frac{x}{15x+5} + \frac{x-3}{3x+1} \right)$$

$$\left[x < -\frac{1}{3} \vee x > 0 \right]$$

$$39 \quad \frac{x+10}{x-2} - \frac{2x-1}{2-x} > \frac{x-3}{x-2} - \frac{x+6}{3x-6}$$

$$[x < -6 \vee x > 2]$$

$$40 \quad \frac{(x+1)^2}{x-1} - \frac{x(2x-1)}{x-1} < \frac{(x-2)(x+2)}{x-1} - \frac{2(x^2+3)}{x-1}$$

$$\left[-\frac{11}{3} < x < 1 \right]$$

$$41 \quad \frac{(x-1)^2}{2x+4} - \frac{(x-2)(x+2)}{4x+8} + \frac{x^2+3}{12x+24} > \frac{x(x-1)}{3x+6}$$

$$\left[-2 < x < \frac{21}{8} \right]$$

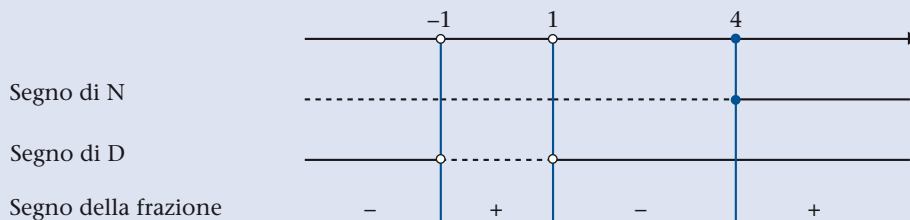
unpo' diaiuto

$$\blacksquare \quad \frac{x-4}{x^2-1} \leq 0$$

Studio del segno di N: $x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$.

Studio del segno di D: $x^2-1 > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$.

Schematizzazione dei segni:

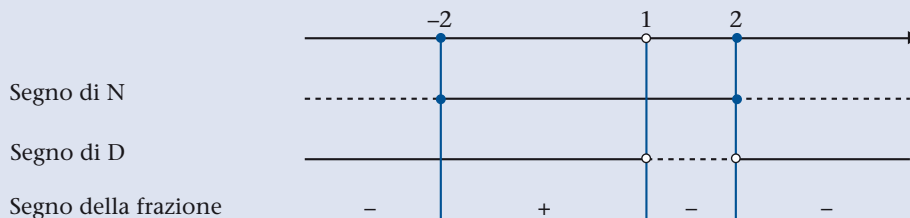


$$S = \{\forall x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee 1 < x \leq 4\} = (-\infty, -1) \cup (1, 4]$$

$$\bullet \frac{4-x^2}{x^2-3x+2} \geq 0$$

Studio del segno di N: $4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$.Studio del segno di D: $x^2-3x+2 > 0 \Rightarrow x < 1 \vee x > 2$.

Schematizzazione dei segni:



$$S = \{\forall x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1\} = [-2, 1).$$

Risolvere in \mathbb{R} o in un suo sottoinsieme le seguenti disequazioni frazionarie (la cui risoluzione è riconducibile alla risoluzione di disequazioni di primo o secondo grado)

$$42 \quad \frac{1}{x^2} > 0 \quad [x \neq 0] \quad 43 \quad \frac{1}{x^2+1} > 0 \quad [\mathbb{R}]$$

$$44 \quad \frac{6x^2+12}{x} > 0 \quad [x > 0] \quad 45 \quad \frac{x}{x^2-4} < 0 \quad [x < -2 \vee 0 < x < 2]$$

$$46 \quad \frac{x^2}{x^2+1} \leq 0 \quad [x = 0] \quad 47 \quad \frac{x^2-9}{3x} \geq 0 \quad [-3 \leq x < 0 \vee x \geq 3]$$

$$48 \quad \frac{x^2}{x^2-1} > 0 \quad [x < -1 \vee x > 1] \quad 49 \quad \frac{x^2-1}{x^2} \geq 0 \quad [x \leq -1 \vee x \geq 1]$$

$$50 \quad \frac{x^2-2x+1}{x^2} < 0 \quad [\emptyset] \quad 51 \quad \frac{x^2-4x+4}{x^2} > 0 \quad [x \neq 2 \wedge x \neq 0]$$

$$52 \quad \frac{4x^2+12x+9}{x^2-1} > 0 \quad \left[x < -\frac{3}{2} \vee -\frac{3}{2} < x < -1 \vee x > 1 \right]$$

$$53 \quad \frac{4x^2-1}{x^2-3x+2} \leq 0 \quad \left[-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \vee 1 < x < 2 \right]$$

$$54 \quad \frac{4x^2-5x+1}{5x^2-7x+2} > 0 \quad \left[x < \frac{1}{4} \vee x > \frac{2}{5} \wedge x \neq 1 \right]$$

$$55 \quad \frac{2x^2 + 11x - 6}{3x^2 - 2x - 1} < 0$$

$$\left[-6 < x < -\frac{1}{3} \vee \frac{1}{2} < x < 1 \right]$$

$$56 \quad \frac{5x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 48x + 180} \leq 0$$

$$\left[-10 < x < -6 \vee -1 \leq x \leq \frac{2}{5} \right]$$

$$57 \quad \frac{14x^2 - 9x + 1}{-6x^2 + 5x - 1} \geq 0$$

$$\left[\frac{1}{7} \leq x < \frac{1}{3} \right]$$

$$58 \quad \frac{33x^2 + x - 4}{9x^2 + 12x - 5} < 0$$

$$\left[-\frac{5}{3} < x < -\frac{4}{11} \right]$$

$$59 \quad \frac{20x^2 + 100x}{7x^2 + 12x + 5} \geq 0$$

$$\left[x \leq -5 \vee -1 < x < -\frac{5}{7} \vee x \geq 0 \right]$$

$$60 \quad \frac{x^2 + 11x - 12}{16x^2 - 40x + 25} \leq 0$$

$$[-12 \leq x \leq 1]$$

$$61 \quad \frac{36x^2 + 180x + 225}{9x^2 - 12x + 4} > 0$$

$$\left[x \neq \frac{2}{3} \wedge x \neq -\frac{5}{2} \right]$$

$$62 \quad \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 + 2x + 1} > 0$$

$$\left[x < -1 \vee x > \frac{3}{2} \right]$$

$$63 \quad \frac{2x^2 - x - 10}{3x^2 + 5x - 2} \leq 0$$

$$\left[\frac{1}{3} < x \leq \frac{5}{2} \right]$$

$$64 \quad \frac{3x^2 + 6x - 24}{x^2 - x - 2} \leq 0$$

$$[-4 \leq x < -1]$$

$$65 \quad \frac{9x^2 - 7x - 2}{27x^2 + 24x + 4} > 0$$

$$\left[x < -\frac{2}{3} \vee x > 1 \right]$$

$$66 \quad \frac{5x^2 + 4x - 12}{x^2 - x - 6} < 0$$

$$\left[\frac{6}{5} < x < 3 \right]$$

$$67 \quad \frac{2x^2 - 3x - 2}{6x^2 - x - 2} > 0$$

$$\left[x < \frac{2}{3} \vee x > 2 \wedge x \neq -\frac{1}{2} \right]$$

$$68 \quad \frac{15x^2 - 41x + 14}{10x^2 + 21x - 10} \geq 0$$

$$\left[x < -\frac{5}{2} \vee x \geq \frac{7}{3} \right]$$

$$69 \quad \frac{8x^2 - 14x + 3}{12x^2 + 17x - 5} \leq 0$$

$$\left[-\frac{5}{3} < x \leq \frac{3}{2} \wedge x \neq \frac{1}{4} \right]$$

$$70 \quad \frac{8x^2 - 15x + 7}{16x^2 + 10x - 21} > 0$$

$$\left[x < -\frac{3}{2} \vee x > 1 \right]$$

$$71 \quad \frac{6x^2 - 17x + 5}{4x^2 + 4x - 35} < 0$$

$$\left[-\frac{7}{2} < x < \frac{1}{3} \right]$$

72 $\frac{x-1}{3x} - \frac{2(x-1)}{3x^2+3x} > 0$ [$x < -1 \vee 0 < x < 1 \vee x > 1$]

73 $\frac{x-2}{x-1} - \frac{2x-3}{x+1} > 0$ [$-1 < x < 1$]

74 $\frac{2x}{2x-1} < \frac{x+1}{4x^2-4x+1}$ [$x \neq \frac{1}{2} \wedge -\frac{1}{4} < x < 1$]

75 $\frac{x}{x+5} > \frac{x}{x-5} + \frac{x^2}{x^2-25}$ [$-10 < x < -5 \vee 0 < x < 5$]

76 $\frac{x-3}{2-x} + \frac{x}{x+2} < \frac{x^2}{x^2-4}$ [$x < -3 \vee x > -2 \wedge x \neq 2$]

77 $\frac{x^2-16}{x^2-2x+1} - \frac{2x+1}{x-1} \geq \frac{x(3-2x)}{(x-1)^2}$ [$x \leq -3 \vee x \geq 5$]

78 $\frac{x+3}{2x+4} - \frac{x}{x^2+4x+4} \leq \frac{x+1}{x+2} - 2$ [\emptyset]

79 $\frac{x}{x+4} - \frac{x^2}{x^2+8x+16} \leq \frac{2x+1}{2x+8}$ [$x \neq -4$]

80 $\frac{3+x}{4+2x} - \frac{2}{3x+6} \leq \frac{x+1}{5x+10} + \frac{x}{x^2+4x+4}$ [\emptyset]

81 $\frac{2x-1}{x^2-1} > \frac{3x+5}{x+1} - \frac{x-4}{x-1} + \frac{x-3}{x+1}$ [$-1 < x < 1$]

unpo' diaiuto

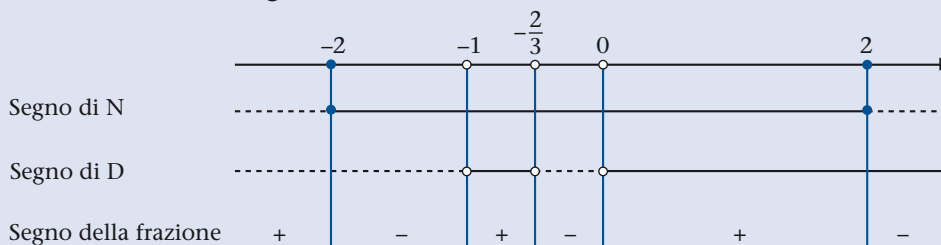
■ $\frac{16-x^4}{3x^3+5x^2+2x} \geq 0$

Studio del segno di N: $16-x^4 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Studio del segno di D: $3x^3+5x^2+2x > 0 \Rightarrow x(3x^2+5x+2) > 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 < x < -\frac{2}{3} \vee x > 0$

Schematizzazione dei segni:



$S = \{ \forall x \in R \mid x \leq -2 \vee -1 < x < -\frac{2}{3} \vee 0 < x \leq 2 \} = (-\infty, -2] \cup \left(-1, -\frac{2}{3}\right) \cup (0, 2]$

Risolvere in R o in un suo sottoinsieme le seguenti disequazioni frazionarie (la cui risoluzione è riconducibile alla risoluzione di disequazioni di primo grado, di secondo grado o di grado superiore)

$$82 \quad \frac{1}{x^3+1} > 0 \quad [x > -1] \quad 83 \quad \frac{1}{x^5-1} < 0 \quad [x < 1]$$

$$84 \quad \frac{x}{x^3-1} > 0 \quad [x < 0 \vee x > 1] \quad 85 \quad \frac{x^2}{x^3-8} > 0 \quad [x > 2]$$

$$86 \quad \frac{x^2}{x^3+8} > 0 \quad [x > -2 \wedge x \neq 0] \quad 87 \quad \frac{9-x^2}{x^7} \leq 0 \quad [-3 \leq x < 0 \vee x \geq 3]$$

$$88 \quad \frac{x^6}{x^2-4} \geq 0 \quad [x = 0 \vee x < -2 \vee x > 2] \quad 89 \quad \frac{x^2}{x^3-8} < 0 \quad [x < 2 \wedge x \neq 0]$$

$$90 \quad \frac{x^2-1}{x^3+8} \geq 0 \quad [-2 < x \leq -1 \vee x \geq 1] \quad 91 \quad \frac{x^4+1}{x^3-1} \leq 0 \quad [x < 1]$$

$$92 \quad \frac{x^3+1}{x^6+1} \geq 0 \quad [x \geq -1] \quad 93 \quad \frac{16x^4-1}{3x^3-81} < 0 \quad \left[x < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < x < 3 \right]$$

$$94 \quad \frac{625x^4-16}{8x^3-125} \leq 0 \quad \left[x \leq -\frac{2}{5} \vee \frac{2}{5} \leq x < \frac{5}{2} \right]$$

$$95 \quad \frac{x^4-4x^2}{x^4-5x^2+4} > 0 \quad [x < -1 \vee x > 1 \wedge x \neq \pm 2]$$

$$96 \quad \frac{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}{x^4+x} < 0 \quad [-1 < x < 0]$$

$$97 \quad \frac{x^6-2x^3+1}{3x^5-3x} \geq 0 \quad [-1 < x < 0 \vee x > 1]$$

$$98 \quad \frac{4-3x^2}{x} + x^3 < 4-2x^2 \quad [x < 0 \wedge x \neq -2]$$

$$99 \quad \frac{1}{x^3-1} \leq 15-x^4 - \frac{16+x^7}{1-x^3} \quad [-15 \leq x \leq 0 \vee x > 1]$$

$$100 \quad \frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} < \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} \quad [x > -1 \wedge x \neq 1]$$

$$101 \quad \frac{x^2}{x^3-1} \leq \frac{2-x}{x-1} + \frac{x^2}{x^2+x+1} \quad [x \leq -1 \vee 1 < x \leq 2]$$

$$102 \quad \frac{x}{x^3-1} + \frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)} > \frac{x^2}{x^2-2x+1} - \frac{x}{x-1} \quad [x < 0]$$

ESERCIZI RIEPILOGATIVI

Risolvere in R o in un suo sottoinsieme le seguenti disequazioni

$$1 \quad \frac{(x-1)^2}{x} - \frac{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)}{3x^2} \geq \frac{x^2-2x+1}{2x} + \frac{x^2-1}{6x^2} \quad \left[x \neq 0 \wedge -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right]$$

$$2 \quad \frac{x}{x^2-2x+1} - \frac{2x-1}{x-1} \leq \frac{x(3-2x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2-1} \quad \left[-\sqrt{2} \leq x < -1 \vee 1 < x \leq \sqrt{2} \right]$$

$$3 \quad \frac{(x+2)^2}{3x+9} - \frac{(x-2)(x+2)}{2x-2} + \frac{8+x^3}{6x^2+12x-18} \geq 0 \quad \left[1 < x \leq 6 \vee -3 < x \leq -2 \right]$$

$$4 \quad \frac{(x-1)^2}{3x+6} - \frac{(1+x)(x-1)}{2x+4} < \frac{1-x^3}{6x-24} \quad \left[x < -2 \vee 1 < x < 2 \vee x > \frac{11}{2} \right]$$

$$5 \quad \frac{x^2-1}{x-2} - \frac{x^3-2}{x^2-1} < \frac{(x-1)^2}{x-1} + \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} \quad \left[x \neq 0 \wedge -1 < x < 1 \vee x > 2 \right]$$

$$6 \quad \frac{x^4-4x^2+4}{x^3-1} \leq 0 \quad \left[x = \sqrt{2} \vee x < 1 \right]$$

$$7 \quad \frac{3x^6+7x^2+4}{x^2-4} \geq 0 \quad \left[x < -2 \vee x > 2 \right]$$

$$8 \quad \frac{x^6+12x^3+11}{4x^2-1} < 0 \quad \left[-\sqrt[3]{11} < x < -1 \vee -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \right]$$

$$9 \quad \frac{x^8+x^4-2}{9x^2-16} > 0 \quad \left[x < -\frac{4}{3} \vee -1 < x < 1 \vee x > \frac{4}{3} \right]$$

$$10 \quad \frac{x^{16}+3x^8+2}{x^2-4x+4} > 0 \quad \left[x \neq 2 \right]$$

L'ESSENZIALE

- Una disequazione numerica in una sola incognita si dice frazionaria se l'incognita compare in almeno uno dei denominatori presenti nella disequazione.

- Per risolvere una disequazione frazionaria della forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ o $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ (assume

tale forma dopo aver eseguito le eventuali operazioni in essa contenute e ridotto entrambi i membri allo stesso denominatore, tutto nel rispetto dei tre principi di equivalenza) è necessario seguire la seguente procedura:

1. studiare separatamente il segno del numeratore e il segno del denominatore;
2. schematizzare entrambi i segni e precisamente:
 - rappresentare sulla retta reale tutti i valori di x che annullano sia il numeratore, sia il denominatore; se nella disequazione è presente anche il simbolo di uguaglianza, si traccia un cerchio • pieno in corrispondenza del valore che annulla il numeratore; in tutti gli altri casi, si traccia un cerchio o vuoto;
 - tracciare due linee parallele alla retta reale, una corrispondente al segno del numeratore e l'altra a quello del denominatore, che sarà un tratto continuo, negli intervalli in cui ciascun termine della frazione assume segno positivo, e non continuo, negli intervalli in cui assume segno negativo;
3. applicare la regola del segno di un prodotto (procedendo con la moltiplicazione in "verticale", rispetto al lettore), individuando così l'insieme S delle soluzioni.

$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ è verificata dai valori reali corrispondenti agli intervalli in cui nella schematizzazione del segno del prodotto è presente il segno "+"; altrimenti, da quelli corrispondenti agli intervalli in cui nella schematizzazione è presente il segno "-".

- Se una disequazione assume la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ e nella schematizzazione dei segni è

presente solo il segno negativo o, viceversa, se la disequazione assume la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ e nella schematizzazione dei segni è presente solo il segno positivo, eviden-

temente l'insieme delle soluzioni è vuoto: $S = \emptyset$. Se nella schematizzazione dei segni è presente solo il segno indicato dal testo, nessun valore reale escluso, allora $S = R$.

SAPERE

COMPLETA

- 1 Una disequazione numerica in una sola incognita si dice frazionaria se
- 2 Risolvere la disequazione $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ significa

- 3 L'insieme delle soluzioni di una disequazione frazionaria, se nella schematizzazione del prodotto dei segni è presente solo il segno opposto di quello indicato dal testo, nessun valore reale escluso, è uguale a

SCELTA MULTIPLA

- 4 Una disequazione numerica in una sola incognita si dice frazionaria se:
- l'incognita compare in almeno uno dei denominatori presenti nella disequazione
 - l'incognita compare in tutti i denominatori presenti nella disequazione
 - l'incognita compare in almeno uno dei numeratori presenti nella disequazione
 - l'incognita non compare in nessun denominatore presente nella disequazione
- 5 L'insieme delle soluzioni di una disequazione frazionaria non verificata da alcun valore reale è:
- $(-\infty, +\infty)$
 - $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
 - \emptyset
- 6 L'insieme delle soluzioni di una disequazione frazionaria verificata da tutti i valori reali escluso il numero 0 è:
- $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - $(-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$
 - $[-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$
 - $[-\infty, 0) \cup (0, +\infty]$

VERO/FALSO

- 7 Il segno di $\frac{P(x)}{Q(x)}$ coincide con il segno di $Q(x)$. V F
- 8 Nella schematizzazione dei segni, un tratto non continuo corrisponde al segno negativo. V F
- 9 Se nella schematizzazione dei segni è presente solo il segno indicato dal testo allora $S = \emptyset$. V F

SAPER FARE

unpo' diaiuto

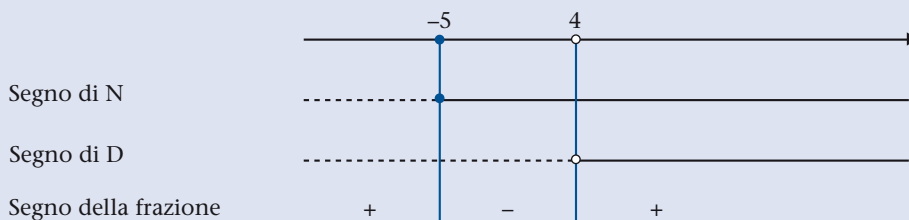
■ $\frac{x+5}{x-4} \leq 0$

Il segno del numeratore e il segno del denominatore devono essere studiati separatamente. Poiché il verso della disequazione contiene anche il simbolo di uguaglianza, il numeratore si pone maggiore o uguale a 0 e il denominatore maggiore di 0 (data una frazione: se si annulla il suo numeratore, si annulla anche la frazione; se si annulla il suo denominatore, la frazione perde significato in R).

Studio del segno del numeratore N: $x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$.

Studio del segno del denominatore D: $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$.

Schematizzazione dei segni:



Dalla schematizzazione dei segni, si deduce che l'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza è: $S = \{\forall x \in R \mid -5 \leq x < 4\} = [-5, 4)$.

Risolvere in R o in un suo sottoinsieme le seguenti disequazioni frazionarie (la cui risoluzione è riconducibile alla risoluzione di disequazioni di primo grado)

1 $\frac{1}{x} > 0$

2 $-\frac{2}{x} > 0$

3 $-\frac{4}{x} < 0$

4 $0 > \frac{1}{x}$

5 $\frac{1+x}{x} \geq 0$

6 $\frac{x-2}{x+6} < 0$

7 $\frac{3-x}{2+x} < 0$

8 $\frac{10x+5}{x-5} \leq 0$

9 $\frac{x-4}{-x} > 0$

10 $\frac{4x}{16x+8} \geq 0$

11 $\frac{-2x}{12x-6} < 0$

12 $\frac{2x}{x-3} + 1 < \frac{x}{x-3}$

13 $\frac{2x}{x+1} - \frac{3x}{4x+4} > -5$

14 $\frac{10x}{3x+6} - \frac{8x}{x+2} - \frac{6}{2x+4} < 0$

15 $\frac{x}{8x-8} \geq -\frac{x}{4x-4} - \frac{1}{2x-2}$

16 $\frac{3x}{4x-8} - \frac{2x}{7x-14} - \frac{x-1}{8x-16} - \frac{2x+1}{15x-30} \leq -\frac{23x}{840(x-2)}$

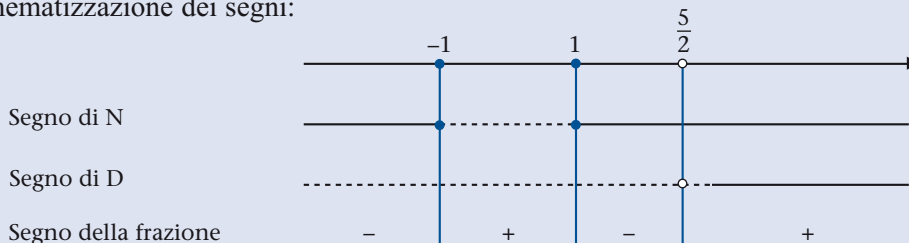
unpo' diaiuto

■ $\frac{x^2-1}{2x-5} \geq 0$

Studio del segno di N: $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$.

Studio del segno di D: $2x - 5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$.

Schematizzazione dei segni:



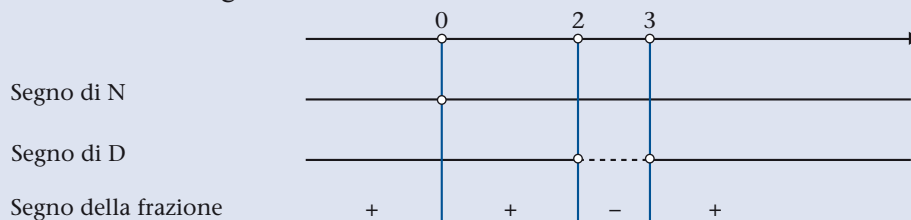
L'insieme delle soluzioni è: $S = \left\{ \forall x \in R \mid -1 \leq x \leq 1 \vee x > \frac{5}{2} \right\} = [-1, 1] \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty \right)$.

$$\blacksquare \frac{x^2}{x^2 - 5x + 6} < 0$$

Studio del segno di N: $x^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0$.

Studio del segno di D: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow x < 2 \vee x > 3$.

Schematizzazione dei segni:



$$S = \{\forall x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\} = (2, 3).$$

Risolvere in \mathbb{R} o in un suo sottoinsieme le seguenti disequazioni frazionarie (la cui risoluzione è riconducibile alla risoluzione di disequazioni di primo o secondo grado)

$$17 \quad \frac{6}{x^2} < 0$$

$$18 \quad \frac{x}{x^2 - 1} > 0$$

$$19 \quad \frac{x^2 - 4}{x} < 0$$

$$20 \quad \frac{x^2 - 1}{x^2} \leq 0$$

$$21 \quad \frac{9x^2 - 1}{4x^2 + 1} \leq 0$$

$$22 \quad \frac{9x^2 + 6x + 1}{x^2 - 4} > 0$$

$$23 \quad \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 9} < 0$$

$$24 \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} > 0$$

$$25 \quad \frac{6x^2 - 5x + 1}{x^2 - 4x + 14} < 0$$

$$26 \quad \frac{6x^2 - 7x + 2}{x^2 - 4x + 4} > 0$$

$$27 \quad \frac{x^2 + 5x + 32}{x^2 - 6x + 9} < 0$$

$$28 \quad \frac{x^2 + 30x + 225}{9x^2 - 4x + 19} \geq 0$$

$$29 \quad \frac{4x^2 + 60x + 225}{9x^2 + 12x + 4} > 0$$

$$30 \quad \frac{2x^2 + 5x + 3}{7x^2 - 4x + 3} > 0$$

$$31 \quad \frac{x^2 + 5x + 21}{2x^2 - 5x + 3} \leq 0$$

unpo' diaiuto

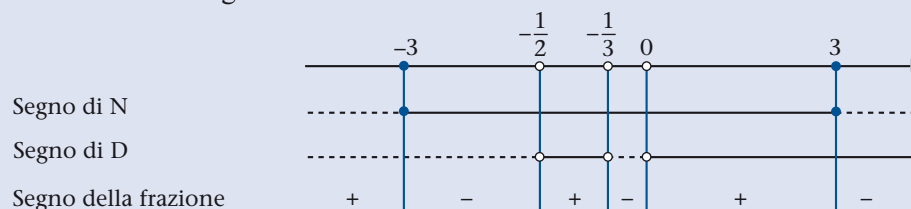
$$\blacksquare \frac{81 - x^4}{6x^3 + 5x^2 + x} \geq 0$$

Studio del segno di N: $81 - x^4 \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Studio del segno di D: $6x^3 + 5x^2 + x > 0$.

$$x(6x^2 + 5x + 1) > 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3} \vee x > 0$$

Schematizzazione dei segni:



$$S = \left\{ \forall x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \vee -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3} \vee 0 < x \leq 3 \right\} = (-\infty, -3] \cup \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \cup (0, 3]$$

Risolvere in R o in un suo sottoinsieme le seguenti disequazioni frazionarie (la cui risoluzione è riconducibile alla risoluzione di disequazioni di primo grado, di secondo grado o di grado superiore)

$$32 \quad \frac{x}{27x^3 - 8} > 0$$

$$33 \quad \frac{x^2}{x^3 - 8} < 0$$

$$34 \quad \frac{x^2}{x^3 + 1} \geq 0$$

$$35 \quad \frac{x^3}{x^3 + 8} < 0$$

$$36 \quad \frac{x^3 - 1}{x^4 + 1} > 0$$

$$37 \quad \frac{x^4 - 8x}{x^4 - 1} \leq 0$$

$$38 \quad \frac{x^4 - 9x^2}{x^3 - 6x^2 + 9x} < 0$$

$$39 \quad \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^3 - 5x^2 + 6x} \geq 0$$

$$40 \quad \frac{x^7 - 5x^5 + 4x^3}{x^8 + x^7 - 3x^6 - 6x^5} \leq 0$$

$$41 \quad \frac{4x^6 - 13x^4 + 9x^2}{x} > 0$$