LE EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Oltre alla soluzione di equazioni di secondo grado è sempre stato un problema risolvere equazioni di grado superiore soprattutto quando non si era ancora in possesso di moderni strumenti di calcolo anche approssimato.
Fu nei primi anni del cinquecento che alcuni algebristi arrivarono alla scoperta della formula risolutiva dell'equazione di terzo grado: **Scipione dal Ferro**, che insegnava all'università di Bologna, trovò intorno al 1505 (o 1515) la formula risolutiva (un prezioso documento manoscritto 595 fu rinvenuto nella biblioteca dell'Università di Bologna e contiene la formula in questione).
In una delle frequenti "gare matematiche" si scontrarono nel 1535 un allievo di Scipione dal Ferro e il valentissimo matematico bresciano **Niccolò Tartaglia** che sosteneva di aver trovato per conto suo la formula risolutiva. Tartaglia ha la meglio quindi Cardano pubblicherà a Norimberga nel 1545 l'Ars Magna con la regola risolutiva dell'equazione di terzo grado attribuendola tanto a Scipione dal Ferro quanto a Tartaglia.
Nell'Algebra di **Rafael Bombelli** , scritta nel 1551 e pubblicata nel 1572 , si trovano tutti gli elementi più rilevanti dello studio dell'algebra del cinquecento tra cui anche la soluzione di vari casi delle equazioni di quarto grado, la cui soluzione è merito di Ludovico Ferrari, e l'introduzione dei numeri complessi.
Nella scuola superiore, con gli strumenti in possesso nel biennio, siamo in grado di risolvere equazioni di grado superiore al secondo di tipo particolare tra cui equazioni fattorizzabili nel prodotto di più polinomi, equazioni biquadratiche, reciproche , binomie e trinomie.

EQUAZIONI CHE SI POSSONO RISOLVERE MEDIANTE SCOMPOSIZIONE

Occorre tenere presente tre teoremi fondamentali:

1.**Legge dell'annullamento del prodotto**: un prodotto di due o più fattori è uguale a zero quando almeno uno dei due fattori è nullo;

2.**Teorema fondamentale dell'algebra**: data un'equazione algebrica di grado n nell'incognita x

(1) $$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$$

questa ha sempre n soluzioni nel campo complesso mentre nel campo reale ha un numero di soluzioni al più uguale a n.

3.Ogni radice intera dell'equazione(1) è un divisore del termine noto a_n e ogni radice razionale p/q (con p e q primi tra loro) dell'equazione ha per numeratore un divisore del termine noto a_n e per denominatore un divisore del coefficiente a_0 del termine di grado massimo.
Possiamo utilizzare tutti i metodi studiati per la scomposizione dei polinomi (prodotto notevoli, raccoglimenti, regola di Ruffini) al fine di scomporre il primo membro dell'equazione (1).
Esempi:
- $x^3 - 27 = 0$ il primo membro si può scomporre in $(x-3)(x^2+3x+9)=0$ e quindi si procede applicando la legge dell'annullamento del prodotto:
  $x-3=0 \rightarrow x=3$
  $x^2+3x+9=0$ impossibile

- $x^5 - 3x^4 - 4x^3 = 0$ può essere scomposta in $x^3(x^2-3x-4)=0$ quindi si procede applicando la legge dell'annullamento del prodotto;

- $x^4-2x^2+1=0$ può essere scritta come il quadrato di un binomio
  $(x^2-1)^2=0\, da\, cui\, (x-1)^2(x+1)^2=0 \rightarrow x=1\, v x=-1$;

- $x^3+3x^2-x-3=0$ può essere scomposta in
  $(x^2-1)(x+3)=0 \rightarrow x^2-1=0\, v\, x+3=0 \rightarrow x=\pm 1\, v\, x=-3$

- $6x^3-7x^2-x+2=0$ si scompone utilizzando la regola di Ruffini in $(x-1)(6x^2-x-2)=0$
quindi si procede applicando la legge dell'annullamento del prodotto e si ottiene x=1, x=-1/2 , x=2/3.

EQUAZIONI BIQUADRATICHE

Sono tutte equazioni riconducibili alla forma:

$$(2)\quad ax^4+bx^2+c=0 \quad \text{con} \quad a, b, c \neq 0$$

in cui è possibile effettuare la sostituzione $x^2=t$ e ricondurle alla forma dell'equazione di secondo grado ; indicando con t_1 e t_2 le soluzioni dell'equazione nell'incognita t si possono presentare tre casi:

$t_1>0\, e\, t_2>0\, allora$ l'equazione (2) ammette quattro soluzioni reali a due a due opposte;

$t_1<0\, e\, t_2>0\, oppure\, t_1>0\, e\, t_2<0\, allora$ l'equazione (2) ammette due soluzioni reali e due radici complesse coniugate;

$t_1<0\, e\, t_2<0\, allora$ l'equazione (2) non ammette radici reali ma solo radici complesse .
Se l'equazione (2) nella variabile t ammette radici reali ($\Delta>0$) il segno delle soluzioni si può determinare anche senza calcolarle in base alla regola di Cartesio secondo cui "ad ogni permanenza corrisponde una soluzione di segno negativo e ad ogni variazione corrisponde una soluzione di segno positivo".

EQUAZIONI BINOMIE

Le equazioni binomie si presentano sotto la forma di un binomio

$$x^n+a=0 \quad (3)$$

Il numero delle soluzioni dipende da n e dal segno di a:
- se n è pari l'equazione ammette soluzioni reali solo se a <0 date da $x=\pm\sqrt[n]{-a}$
- se n è dispari l'equazione ammette sempre una sola soluzione reale data da $x=-\sqrt[n]{a}$

EQUAZIONI TRINOMIE

Sono tutte equazioni riconducibili alla forma:

$$(4)\quad ax^{2n}+bx^n+c=0 \qquad n\in\mathbb{N}, n>1, a, b, c\neq 0$$

in cui è possibile effettuare la sostituzione $x^n=t$ e ricondurle alla forma dell'equazione di secondo grado ; si ottengono così due equazioni binomie che si risolvono come sopra.