

# MATEMATICA C<sup>3</sup> -ALGEBRA 2

## 3. EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO



Alvaro Tapia, *Skateboard*  
[http://www.flickr.com/photos/foto\\_saiker/3087292011/](http://www.flickr.com/photos/foto_saiker/3087292011/)

## ► 1. Equazioni riconducibili al prodotto di due o più fattori

### Problema

Trovare un numero il cui cubo, insieme con due suoi quadrati e dieci volte il numero stesso, dia come somma 20.

Il problema enunciato venne posto da Giovanni Panormita, astronomo e filosofo alla corte di Federico II, a Leonardo Pisano, detto Fibonacci, che ne tentò la soluzione nella sua opera Flos.

Con il linguaggio matematico attuale il problema si formalizza nell'equazione di terzo grado

$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$  ; Fibonacci pervenne al valore approssimato  $x = 1,3688$  come soluzione al problema, senza indicare la via seguita per la sua determinazione. Pur tuttavia egli riuscì a dimostrare che le soluzioni di un'equazione di terzo grado non possono mai esprimersi mediante radicali quadratici neanche se sovrapposti.

Solo nel XVI secolo, ad opera del matematico italiano Ferrari, fu scoperta la formula risolutiva dell'equazione generale di terzo grado per le equazioni che si presentano nella forma  $x^3 = px + q$ . A questa forma è sempre possibile ricondurre una qualsiasi equazione di terzo grado, la cui equazione canonica è

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

In questo capitolo ci proponiamo di determinare l'Insieme Soluzione di equazioni algebriche di grado superiore al secondo.

**DEFINIZIONE:** Un'equazione algebrica si presenta nella forma  $p(x) = 0$  dove  $p(x)$  è un polinomio nella variabile  $x$ , di grado  $n$ , a coefficienti reali:  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

### Esempio

Vogliamo risolvere l'equazione  $x^3 = 15x + 4$ , nota come equazione di Raffaele Bombelli, matematico bolognese del XVI secolo. Bombelli la risolse attraverso passaggi che coinvolgono radici quadrate di numeri negativi che non esistono in campo reale.

Vediamo come possiamo determinare l'I.S. con le nostre conoscenze.

Scriviamo l'equazione nella forma canonica  $p(x) = 0$ :  $x^3 - 15x - 4 = 0$  e serviamoci del teorema di Ruffini per determinarne uno zero intero. Sappiamo che gli eventuali zeri interi si trovano tra i divisori del termine noto, quindi possiamo provare con  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ .

Si ottiene  $p(4) = 0$  dunque  $x^3 - 15x - 4 = (x - 4) \cdot (\dots) = 0$  e il fattore da calcolare sarà di secondo grado e sarà determinato con la divisione di  $p(x) = x^3 - 15x - 4$  con il binomio  $x - 4$ .

Potete verificare che si ottiene:  $x^3 - 15x - 4 = (x - 4) \cdot (x^2 + 4x + 1) = 0$  da cui per la legge di annullamento del prodotto  $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \vee x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow \emptyset$ . L'ultima equazione non ha soluzioni reali essendo il discriminante negativo ( $\Delta = \dots$ )

L'equazione assegnata ammette quindi una sola soluzione reale e  $I.S. = \{4\}$ .

### Esempio

Determinare le radici reali dell'equazione  $4x^3 + x^2 - 4x - 1 = 0$

Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro mediante raccoglimento parziale:

$$p(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1 = 4x \cdot (x^2 - 1) + (x^2 - 1) = (x^2 - 1) \cdot (4x + 1)$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto si ottiene

$$\begin{cases} x^2 - 1 \rightarrow x = -1 \vee x = 1 \\ 4x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

L'equazione ha dunque tre soluzioni reali distinte e  $I.S. = \left\{ -1; 1; -\frac{1}{4} \right\}$ .

### Esempio

$$\frac{2x+3}{2x+1} + \frac{x^2}{x+1} = 5x+3$$

L'equazione assegnata è frazionaria

1° passo: riduciamo allo stesso denominatore:

$$\frac{2x^2 + 5x + 3 + 2x^3 + x^2 - 10x^3 - 15x^2 - 5x - 6x^2 - 9x - 3}{(2x+1) \cdot (x+1)} = 0$$

2° passo: poniamo le Condizioni d'Esistenza  $x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq -1$

3° passo: eliminiamo il denominatore e sommiamo i monomi simili al numeratore; l'equazione in forma canonica è  $8x^3 + 18x^2 + 9x = 0$  di terzo grado

4° passo: scomponiamo il polinomio al primo membro  $x \cdot (8x^2 + 18x + 9) = 0$

5° passo: per la legge di annullamento del prodotto otteniamo le soluzioni dell'equazione equivalente alla data  $x = 0 \vee x = -\frac{3}{4} \vee x = -\frac{3}{2}$

### Esempio

Come ultimo esempio prendiamo in considerazione l'equazione risolvente il problema di Giovanni Panormita:  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ . L'obiettivo è cercare la scomposizione in fattori irriducibili del polinomio al primo membro, ma i metodi di scomposizione studiati non permettono di determinare i fattori del polinomio.

Non possiamo affermare nulla circa l'esistenza o meno di soluzioni reali; in seguito, nel corso dei vostri studi, dimostrerete che un'equazione polinomiale di terzo grado ammette sempre almeno una soluzione reale, talvolta determinabile attraverso la scomposizione come abbiamo visto negli esempi, altre volte invece usando metodi di calcolo approssimato.

**Osservazione. Un'equazione ammette tante soluzioni, che possono essere reali e distinte, coincidenti o non reali, quante ne indica il suo grado.**

*Determinare l'I.S. delle equazioni*

- |   |  |                         |
|---|--|-------------------------|
| 1 | $x^3 - 3x + 2 = 0$   | R. I.S. = { 1 }         |
| 2 | $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$  | R. I.S. = { -1 }        |
| 3 | $x^3 - 6x + 9$   | R. I.S. = { 3 }         |
| 4 | Verificare che $x^5 + 1 = x \cdot (x^3 + 1)$ ammette due soluzioni reali opposte.                        | R. I.S. = { -1 ; +1 }   |
| 5 | Stabilire per quali valori reali la frazione $f(x) = \frac{x^3 + 2 - x \cdot (2x + 1)}{2x - 1}$ è nulla. | R. I.S. = { 1 ; 1 ; 2 } |

Ricordiamo che uno **zero di un polinomio** è il valore che assegnato alla variabile rende il polinomio uguale a zero; l'obiettivo posto viene raggiunto ponendo ogni polinomio uguale a zero, come nell'esempio:

*Trovare gli zeri reali dei seguenti polinomi di terzo grado:*

- |    |   |   |
|----|---|---|
| 6  | $p(x) = x^3 - 7x^2 + 4x + 12$   |   |
|    | Scrivi l'equazione $x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = 0$ è come per gli esercizi precedenti scomponi in fattori e applica la legge di annullamento del prodotto. | I.S. = { 2, -1, 6 }                                     |
| 7  | $p(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$   | I.S. = { -4, -3, 2 }                                    |
| 8  | $p(x) = 6x^3 + 23x^2 + 11x - 12$  | I.S. = $\left\{ \frac{1}{2}, -3, -\frac{4}{3} \right\}$ |
| 9  | $p(x) = 8x^3 - 40x^2 + 62x - 30$  | I.S. = $\left\{ \frac{5}{2}, +1, \frac{3}{2} \right\}$  |
| 10 | $p(x) = x^3 + 10x^2 - 7x - 196$   | I.S. = { 4, -7 }  |
| 11 | $p(x) = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{17}{3}x - 2$   | I.S. = $\left\{ -3, -\frac{1}{3}, +2 \right\}$          |
| 12 | $p(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{38}{3}x + \frac{56}{3}$  | I.S. = $\left\{ -4, +\frac{7}{3}, +2 \right\}$          |
| 13 | $p(x) = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$   | I.S. = $\left\{ 0, +\frac{1}{2}, +1 \right\}$           |
| 14 | $p(x) = 3x^3 - 9x^2 - 9x - 12$  | I.S. = { +4 }   |
| 15 | $p(x) = \frac{6}{5}x^3 + \frac{42}{5}x^2 + \frac{72}{5}x + 12$  | I.S. = { -5 }   |

16  $p(x) = 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$

$I.S. = \left\{ 3, -\frac{1}{2} \right\}$

17  $p(x) = \frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - 10x + 8$

$I.S. = \left\{ 4, \frac{2}{3}, -2 \right\}$

18  $p(x) = -3x^3 + 9x - 6$

$I.S. = \{1, -2\}$

19  $p(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 4$

$I.S. = \{2\}$

20  $p(x) = 4x^3 + 4x^2 - 4x - 4$

$I.S. = \{1, -1\}$

21  $p(x) = \frac{2}{5}x^3 + \frac{8}{5}x^2 + \frac{14}{5}x - 4$

$I.S. = \{5, 1, -2\}$

22  $p(x) = -6x^3 - 30x^2 + 192x - 216$

$I.S. = \{2, -9\}$

23  $2x^2 - 2x + 3(x-1) = 2x(2x^2 - 1)$

R.  $I.S. = \left\{ 1, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2} \right\}$

24  $(3x+1)^2 = x(9x^2 + 6x + 1)$

R.  $I.S. = \left\{ -\frac{1}{3}, 1 \right\}$

25  $(x+1)(x^2-1) = (x^2+x)(x^2-2x+1)$

R.  $I.S. = \{1; 1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\}$

26  $x^3 + 4x^2 + 4x = x^2 - 4$

R.  $I.S. = \{-2\}$

27  $\sqrt{3}x^4 - \sqrt{27}x^2 = 0$

R.  $I.S. = \{-\sqrt{3}; 0; +\sqrt{3}\}$

28  $\sqrt{2}x^3 - (1-2\sqrt{2})x^2 - x = 0$

R.  $I.S. = \left\{ 0; \sqrt{2}-1; -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) \right\}$

29  $x^7 - x^6 + \sqrt{27}x^5 = 0$

R.  $I.S. = \{0\}$

Risolvi le seguenti equazioni frazionarie

30  $\frac{3x-1}{x^2} = 1 - 2x + \frac{1}{x}$

R.  $I.S. = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

31  $\frac{x-1}{x^2+5x+4} - \frac{2x+1}{x-1} - \frac{3}{2(x^2-1)} = 0$

R.  $I.S. = \left\{ -\frac{3}{2}, -2 \right\}$

32  $\frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$

R.  $I.S. = \left\{ 1; -\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\}$

33  $\frac{1}{x^4-4} = \frac{3}{x^4-16}$

R.  $I.S. = \emptyset$

## ► 2. Equazioni binomie

Un'equazione binomia è un'equazione del tipo  $ax^n + b = 0$  con  $a \neq 0$  e con  $n \in \mathbb{N}_0$ .

L'equazione così scritta è detta **forma normale** dell'equazione.

Dobbiamo distinguere i casi:

- $b \neq 0$ 
  - se  $n$  è pari l'equazione ammette due sole soluzioni reali ed opposte se e solo se i due parametri  $a$  e  $b$  sono discordi:  $x_1 = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$  e  $x_2 = -\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$  ;
  - se  $n$  è dispari l'equazione ha un'unica soluzione reale  $x_1 = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$  .
- $b = 0$   
l'equazione è  $ax^n = 0$  e le  $n$  soluzioni sono coincidenti nell'unica soluzione  $x = 0$  . In questo caso si dice che l'unica soluzione  $x = 0$  ha molteplicità  $n$  .

### Esempi

- Risolvere l'equazione  $3x^4 - 8 = 0$  .

L'esponente  $n$  è pari, i coefficienti sono discordi: l'equazione ammette due soluzioni reali distinte:

$$x_1 = \sqrt[4]{\frac{8}{3}} \quad \text{e} \quad x_2 = -\sqrt[4]{\frac{8}{3}} .$$

Osserviamo che l'equazione proposta può essere risolta col metodo della scomposizione in fattori del polinomio al primo membro che può sempre essere considerato, in campo reale, una differenza di quadrati:

$$3x^4 - 8 = 0 \rightarrow (\sqrt{3}x^2 + \sqrt{8}) \cdot (\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}) = 0 \quad \text{e per la legge di annullamento del prodotto}$$

$$(\sqrt{3}x^2 + \sqrt{8}) = 0 \vee (\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}) = 0 \quad \text{la prima equazione non ha soluzioni reali, mentre per la seconda}$$

$$(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}) = 0 \rightarrow x^2 = \sqrt{\frac{8}{3}} \rightarrow x = \pm \sqrt{\sqrt{\frac{8}{3}}} \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{8}{3}}$$

- Risolvere l'equazione  $-6x^4 + 9 = 13$  .

Riducendo alla forma normale troviamo  $-6x^4 - 4 = 0$ ; e moltiplicando ambo i membri per  $-1$  si ottiene  $6x^4 + 4 = 0$  in cui il primo membro è chiaramente una somma di numeri sempre positivi, quindi in  $\mathbb{R}$  l'equazione è impossibile e  $I.S. = \emptyset$

- Determinare in  $\mathbb{R}$  le soluzioni dell'equazione:  $8x^3 + 3 = 4$

Riduciamo prima di tutto l'equazione alla forma normale  $8x^3 + 3 = 4 \rightarrow 8x^3 - 1 = 0$  , di grado dispari, quindi si trova l'unica soluzione  $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$  .

Allo stesso risultato perveniamo se procediamo scomponendo in fattori il binomio del primo membro che risulta essere una differenza di cubi:  $8x^3 - 1 = 0 \rightarrow (2x - 1) \cdot (4x^2 + 2x + 1) = 0$  e per la legge di annullamento del prodotto  $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \vee 4x^2 + 2x + 1 = 0$  che non ha soluzioni reali essendo

$$\Delta < 0 . \text{ Pertanto } I.S. = \left\{ \frac{1}{2} \right\} .$$

- Risolvere l'equazione  $2x^7 + 3 = 2$  .

Riduciamo prima di tutto l'equazione alla forma normale:  $-2x^7 + 1 = 0$  e si trova così l'unica soluzione reale  $x = \sqrt[7]{\frac{1}{2}}$  .

■ Determinare le soluzioni reali dell'equazione:  $3x \cdot (x^2 + 1) = 4 \cdot (1 + x) - (7x + 4)$

$3x^5 = 0 \rightarrow x^5 = 0 \rightarrow x = 0$  una sola soluzione reale con molteplicità 5 .

■ Determinare le soluzioni reali dell'equazione:  $x^3 + 3 = 0$

L'equazione binomia assegnata, per quanto detto sopra, ha l'unica soluzione reale  $x = -\sqrt[3]{3}$  . Vediamo con quale procedimento possiamo spiegare il risultato.

Il polinomio al primo membro può sempre essere pensato come una somma di cubi  $x^3 + 3 = (x)^3 + (\sqrt[3]{3})^3 = 0$  ; scomponendo in fattori si ha  $(x)^3 + (\sqrt[3]{3})^3 = 0 \rightarrow (x + \sqrt[3]{3}) \cdot (x^2 - x\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}^2) = 0$  e per la legge di annullamento del prodotto  $(x + \sqrt[3]{3}) = 0 \rightarrow x = -\sqrt[3]{3} \vee x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{3}^2 = 0$  che non ha soluzioni reali essendo  $\Delta < 0$  .

*Determinate le soluzioni reali delle equazioni:*

**34**  $-2x^3 + 16 = 0$

$x^5 + 15 = 0$

**35**  $x^4 + 16 = 0$

$-2x^4 + 162 = 0$

**36**  $-3x^6 + 125 = 0$

$81x^4 - 1 = 0$

**37**  $27x^3 + 1 = 0$

$81x^4 - 1 = 0$

R.  $I.S. = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$  ;  $I.S. = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\}$

**38**  $81x^4 - 1 = 0$

$\frac{16}{x^4} - 1 = 0$

R.  $I.S. = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  ;  $I.S. = \{-2; +2\}$

**39**  $x^6 - 1 = 0$

$8x^3 - 27 = 0$

**40**  $x^5 - 1 = 0$

$x^4 + 81 = 0$

**41**  $x^4 - 4 = 0$

$3x^5 + 96 = 0$

R.  $I.S. = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$   $I.S. = \{-2\}$

**42**  $49x^6 - 25 = 0$

$\frac{1}{x^3} = 27$

**43**  $x^4 - 10000 = 0$

$100000x^5 + 1 = 0$

**44**  $x^6 - 64000000 = 0$

$x^4 + 625 = 0$

**45**  $81x^4 = 1$

$x^3 - \frac{1}{27} = 0$

**46**  $\frac{x^6}{64} - 1 = 0$

$\frac{64}{x^6} = 1$

**47**  $x^6 = 6$

$x^{10} + 10 = 0$

**48**  $x^{100} = 0$

$10x^5 - 10 = 0$

**49**  $\sqrt[3]{2}x^6 = \sqrt[3]{24}$

$\frac{3}{5}x^3 = \frac{25}{9}$

**50**  $\frac{1}{81}x^4 - 1 = 0$

$\frac{1}{x^4} - 81 = 0$

**51**  $x^8 - 256 = 0$

$x^{21} + 1 = 0$

**52**  $\frac{1}{243}x^5 + 1 = 0$

$x^3 + 3\sqrt{3} = 0$

**53**  $\sqrt{3}x^3 - 3\sqrt[3]{3} = 0$

$\frac{x^4}{9} - \frac{9}{25} = 0$

**54**  $6x^{12} - 12 = 0$

$\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} = 0$

### ► 3. Equazioni trinomie

Un'equazione *trinomia* è un'equazione con tre termini del tipo  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ,  $x^6 - 4x^3 + 3 = 0$ ,  $x^{10} - x^5 + 6 = 0$ . In generale si presentano nella forma  $ax^{2n} + bx^n + c = 0$  dove  $n$  è un intero positivo e dove i coefficienti  $a$  e  $b$  sono non nulli.

Per risolvere queste equazioni è opportuno fare un cambio di incognita: ponendo  $t = x^n$  l'equazione trinomia diventa di secondo grado:  $at^2 + bt + c = 0$  e da questa, detta per evidenti motivi *equazione risolvente*, si ricavano i valori di  $t$ . Successivamente, grazie alla relazione  $t = x^n$ , si ricavano i valori di  $x$ .

Attraverso alcuni esempi vedremo come procedere alla ricerca dell'I.S.

A) Se  $n = 2$  l'equazione è detta **biquadratica** e si presenta nella forma  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ .

#### Esempio

Risolvere in  $\mathbb{R}$  l'equazione  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

L'equazione è biquadratica; facciamo un cambio di incognita ponendo  $x^2 = t$ ; l'equazione diventa  $t^2 - 5t + 4 = 0$ ; essendo il discriminante  $\Delta = 25 - 16 = 9$  positivo si hanno due soluzioni reali distinte  $t_1 = 1 \vee t_2 = 4$ . Per determinare i valori delle soluzioni dell'equazione assegnata procediamo sfruttando la sostituzione posta inizialmente, pertanto si ottiene:

$$\begin{cases} \text{da } t_1 = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = +1 \\ \text{da } t_2 = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = +2 \end{cases}$$

quindi l'equazione assegnata ha quattro soluzioni reali distinte e  $I.S. = \{-1; +1; -2; +2\}$ .

**55** Risolvere in  $\mathbb{R}$  l'equazione  $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ , completando le parti mancanti.

L'equazione è biquadratica quindi ponendo  $x^2 = t$  diventa  $2t^2 + 3t - 2 = 0$ ; essendo il discriminante  $\Delta = \dots\dots\dots$  positivo si hanno due soluzioni reali distinte  $t_1 = -2 \vee t_2 = \frac{1}{2}$ . Per determinare i valori delle soluzioni dell'equazione assegnata procediamo sfruttando la sostituzione posta inizialmente, pertanto si ottiene:

$$\begin{cases} \text{da } t_1 = -2 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow I.S. = \dots\dots\dots \\ \text{da } t_2 = \frac{1}{2} \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = \dots\dots \vee x_2 = \dots\dots \rightarrow \text{razionalizzando } x_1 = \dots\dots \vee x_2 = \dots\dots \end{cases}$$

In questo caso l'equazione assegnata ha  $\dots\dots$  soluzioni reali distinte e  $I.S. = \dots\dots\dots$

*Determinare l'I.S. delle seguenti equazioni biquadratiche:*

**56**  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$  R.  $I.S. := \{-3; 3; 2; -2\}$

**57**  $2x^4 - 20x^2 + 18 = 0$  R.  $I.S. := \{-1; 1; 3; -3\}$

**58**  $x^4 - \frac{37}{9}x^2 + \frac{4}{9} = 0$  R.  $I.S. := \left\{-2; 2; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$

**59**  $x^4 - \frac{13}{3}x^2 + \frac{4}{3} = 0$  R.  $I.S. := \left\{-1; 1; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$

**60**  $-x^4 + \frac{17}{4}x^2 - 1 = 0$  R.  $I.S. := \left\{-2; 2; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

**61**  $-2x^4 + \frac{65}{2}x^2 - 8 = 0$  R.  $I.S. := \left\{-4; 4; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$

**62**  $-2x^4 + 82x^2 - 800 = 0$  R.  $I.S. := \{-4; 4; -5; 5\}$

**63**  $-3x^4 + \frac{85}{3}x^2 - 12 = 0$  R.  $I.S. := \left\{-3; 3; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$

- 64  $x^4 - \frac{16}{3}x^2 + \frac{16}{3} = 0$  R.  $LS := \left\{ -2; 2; -\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\}$
- 65  $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$  R.  $LS := \{-1; 1; -\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$
- 66  $x^4 - 10x^2 + 6 = 0$  R.  $LS := \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$
- 67  $-3x^4 + 9x^2 + 12 = 0$  R.  $LS := \{-2; 2\}$
- 68  $-\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 18 = 0$  R.  $LS := \{-3; 3\}$
- 69  $x^4 + \frac{15}{4}x^2 - 1 = 0$  R.  $LS := \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$
- 70  $-8x^4 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{9}{2} = 0$  R.  $LS := \left\{ -\frac{3}{4}; \frac{3}{4} \right\}$
- 71  $-16x^4 - 63x^2 + 4 = 0$  R.  $LS := \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right\}$
- 72  $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$  R.  $LS := \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$
- 73  $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$  R.  $LS := \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

74 L'equazione  $x^4 - \frac{16}{9}x^2 = 0$  è biquadratica incompleta poiché manca ..... ; si può determinare l'insieme soluzione raccogliendo  $x^2$  a fattore comune e con la legge di ..... concludere  $x^2 = \dots \vee x^2 = \dots$  da cui  $LS = \{ \dots \}$ . È vero che una delle soluzioni ha molteplicità due? Possiamo allora dire che l'equazione assegnata ha quattro soluzioni reali di cui due coincidenti?

- 75 È vero che l'equazione  $4x^4 - 4 = 0$  ha quattro soluzioni reali a due a due coincidenti? R. (F)
- 76 Nel procedimento risolutivo dell'equazione  $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$  si determina l'equazione di secondo grado  $t^2 - \dots = 0$  con  $\Delta = \dots$  quindi  $t_1 = \dots \vee t_2 = \dots$  e dunque le quattro soluzioni reali ..... sono .....
- 77 È vero che l'equazione  $-x^4 + 2x^2 - 1 = 0$  ha quattro soluzioni reali a due a due coincidenti? R. (V)
- 78 Perché le seguenti equazioni non hanno soluzioni reali?

- A)  $x^4 + \frac{37}{4}x^2 + \frac{9}{4} = 0$     B)  $x^4 - x^2 + 3 = 0$     C)  $-2x^4 - x^2 - 5 = 0$     D)  $-x^4 - 5x^2 - 4 = 0$

**Conclusion:** l'equazione biquadratica  $ax^4 + bx^2 + c = 0$

- ha quattro soluzioni reali distinte se il discriminante dell'equazione risolvente è ..... e se risultano positivi anche i rapporti  $-\frac{b}{a}$  e  $\frac{c}{a}$  che indicano rispettivamente la ..... e il ..... delle sue soluzioni. Perché?
- ha due soluzioni reali distinte se il discriminante dell'equazione ..... è ..... e se risulta negativo il rapporto  $\frac{c}{a}$  che indica il ..... delle sue soluzioni. Perché?
- **non** ha soluzioni reali se il discriminante dell'equazione ..... è ..... e se risulta positivo il rapporto  $\frac{c}{a}$  e negativo il rapporto  $-\frac{b}{a}$  che indicano rispettivamente il ..... e la ..... delle sue soluzioni. Perché?
- **non** ha soluzioni reali se il discriminante dell'equazione ..... è ..... Perché?

79 Senza risolvere le seguenti equazioni, dire se ammettono soluzioni reali:

- A)  $2x^4 + 5x^2 - 4 = 0$     B)  $2x^4 - 5x^2 + 4 = 0$     C)  $x^4 - 5x^2 + 1 = 0$     D)  $-4x^4 + 5x^2 - 1 = 0$

R. [si, no, si, no]

80 Data l'equazione letterale  $x^2 \cdot (x^2 - 2a + 1) = a \cdot (1 - a)$ , stabilire per quali valori del parametro a si hanno quattro soluzioni reali. R.  $a > 1$

**81** Determinare l'I.S. dell'equazione  $8x^2 + \frac{6x^2+x-4}{x^2-1} = 4 - \frac{3+4x}{1+x}$  R.  $I.S. = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \right\}$

**82** È vero che la somma delle radici dell'equazione  $ax^4+bx^2+c=0$  è nulla?

**83** Verifica le seguenti uguaglianze relative alle soluzioni (reali) dell'equazione  $ax^4+bx^2+c=0$  :

A)  $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = -\frac{2b}{a}$                       B)  $x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 \cdot x_4^2 = \frac{c}{a}$

**84** Ricordando la regola di Cartesio che esprime il legame tra il segno dei coefficienti di un'equazione di secondo grado e il segno delle sue soluzioni, completate lo schema sottostante ancora relativo alle soluzioni dell'equazione biquadratica:

Equazione risolvente	Segno coefficienti	Equazione biquadratica
$\Delta > 0$	2 variazioni	4 soluzioni reali
	1 permanenza- 1 variazione	.....
	.....	.....
$\Delta = 0$	$x = -\frac{b}{2a} > 0$	.....
	$x = -\frac{b}{2a} < 0$	.....
$\Delta < 0$		.....

B) Equazioni trinomie con  $n > 2$  vediamo come determinare l'I.S. delle equazioni trinomie attraverso alcuni esempi

Esempi

■ Risolvere l'equazione  $x^6 - 4x^3 + 3 = 0$  .

Ponendo  $t = x^3$  abbiamo l'equazione risolvente  $t^2 - 4t + 3 = 0$  , le cui soluzioni reali sono  $t_1 = 1$  ,  $t_2 = 3$  ; per ricavare i valori di  $x$  è sufficiente risolvere le due equazioni binomie  $x^3 = 1$  e  $x^3 = 3$  , trovando così le soluzioni reali per l'equazione assegnata  $x_1 = 1 \vee x_2 = \sqrt[3]{3}$

■ Risolvere l'equazione  $x^8 - x^4 - 2 = 0$  .

Ponendo  $t = x^4$  arriviamo all'equazione  $t^2 - t - 2 = 0$  da cui  $t_1 = 2$  e  $t_2 = -1$  ; pertanto le due equazioni binomie da risolvere sono:  $x^4 = 2$  e  $x^4 = -1$  , quindi

- $x^4 = 2 \rightarrow x^2 = -\sqrt{2} \vee x^2 = +\sqrt{2}$  e di queste due, solo la seconda ha soluzioni reali e precisamente  $x_1 = \sqrt[4]{2}$ ;  $x_2 = -\sqrt[4]{2}$  .
- $x^4 = -1$  che non ha soluzioni reali

concludendo:  $I.S. = \{-\sqrt[4]{2}; +\sqrt[4]{2}\}$

■ Risolvere l'equazione  $x^{12} + x^6 + 3 = 1 - 2x^6$  .

Riconducendo l'equazione alla forma normale, troviamo:  $x^{12} + 3x^6 + 2 = 0$  ; l'equazione non ha soluzioni reali: possiamo infatti osservare che per qualunque valore reale attribuito all'incognita, la somma dei tre termini a primo membro è  $\geq 2$  e quindi non può essere  $= 0$  . Si osservi d'altra parte che, posto  $t = x^6$  , si ricavano le soluzioni  $t_1 = -1$  e  $t_2 = -2$  entrambe negative e quindi le due equazioni binomie  $x^6 = -1$  e  $x^6 = -2$  risultano essere impossibili in  $\mathbb{R}$  .

■ Risolvere l'equazione  $x^{10} - x^5 + 7 = 1$  .

Riconducendo l'equazione alla forma normale, troviamo:  $x^{10} - x^5 + 6 = 0$  ; l'equazione risolvente  $t^2 - t + 6 = 0$  non ha soluzioni reali essendo il discriminante negativo e quindi  $I.S. = \emptyset$

Determinare le soluzioni reali delle seguenti equazioni trinomie

- |           |   |   |
|-----------|---|---|
| <b>85</b> | $x^6 + 13x^3 + 40 = 0$                                  | R. $I.S. := \{-2; -\sqrt[3]{5}\}$                     |
| <b>86</b> | $x^8 - 4x^4 + 3 = 0$                                    | R. $I.S. := \{1; -1; \sqrt[4]{3}; -\sqrt[4]{3}\}$     |
| <b>87</b> | $-x^6 + 29x^3 - 54 = 0$                                 | R. $I.S. := \{3; -\sqrt[3]{2}\}$                      |
| <b>88</b> | $\frac{1}{2}x^{10} - \frac{3}{2}x^5 + 1 = 0$            | R. $I.S. := \{1; \sqrt[5]{2}\}$                       |
| <b>89</b> | $-3x^{12} - 3x^6 + 6 = 0$                               | R. $I.S. := \{1; -1\}$                                |
| <b>90</b> | $2x^8 + 6x^4 + 4 = 0$                                   | R. $\emptyset$  |
| <b>91</b> | $-x^8 - 6x^4 + 7 = 0$                                   | R. $I.S. := \{1; -1\}$                                |
| <b>92</b> | $-2x^6 + \frac{65}{4}x^3 - 2 = 0$                       | R. $I.S. := \left\{2; \frac{1}{2}\right\}$            |
| <b>93</b> | $-\frac{3}{2}x^{10} + \frac{99}{2}x^5 - 48 = 0$         | R. $I.S. := \{1; 2\}$                                 |
| <b>94</b> | $-\frac{4}{3}x^{14} - \frac{8}{9}x^7 + \frac{4}{9} = 0$ | R. $I.S. := \left\{-1; \sqrt[7]{\frac{1}{3}}\right\}$ |

#### ► 4. Equazioni che si risolvono con sostituzioni

Molte altre equazioni si possono risolvere con opportune sostituzioni.

Esempio

■  $(x^2 - 4)^4 - 1 = 0$

Sostituendo  $t = x^2 - 4$  l'equazione diventa  $t^4 - 1 = 0$ . È un'equazione binomia che ha per soluzioni  $t_1 = -1$ ;  $t_2 = +1$ . Sostituendo questi valori nella relazione  $t = x^2 - 4$  si ha

$$\begin{cases} -1 = x^2 - 4 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ +1 = x^2 - 4 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

- |            |  |   |
|------------|--|---|
| <b>95</b>  | $(x^3 + 1)^3 - 8 = 0$  | R. $I.S. = \{1\}$   |
| <b>96</b>  | $2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 3\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 1 = 0$      | sostituire $\frac{x+1}{x-1} = t$<br>R. $I.S. = \left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$ |
| <b>97</b>  | $(x^2 + 1)^2 - 6(x^2 + 1) + 8 = 0$   | R. $I.S. = \{-\sqrt{3}; -1; 1; \sqrt{3}\}$  |
| <b>98</b>  | $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{16}{9}$                                | R. $I.S. = \emptyset$   |
| <b>99</b>  | $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 16\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$          | R. $I.S. = \{8 - 3\sqrt{7}; 8 + 3\sqrt{7}\}$  |
| <b>100</b> | $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 - 12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + 27 = 0$ | R. $I.S. = \left\{\pm\frac{2\sqrt{21}}{3}; \pm\frac{\sqrt{30}}{3}\right\}$                                  |
| <b>101</b> | $(x+1)^2 + 2(x+1)^2 - 5(x+1) - 6 = 0$  | R. $I.S. = \{-4; -2; 1\}$   |
| <b>102</b> | $(x^2 + 1)^3 - 4(x^2 + 1)^2 - 19(x^2 + 1) - 14 = 0$                            | R. $I.S. = \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$   |
| <b>103</b> | $\frac{3x}{x+1} - \left(\frac{3x}{x+1}\right)^3 = 0$                           | R. $I.S. = \left\{-\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{2}\right\}$   |

## ► 5. Equazioni reciproche

Dato un polinomio ordinato, le *coppie di coefficienti equidistanti dagli estremi* sono le coppie costituite dal primo e dall'ultimo coefficiente, dal secondo e dal penultimo, dal terzo e dal terzultimo, ecc. Se il numero dei coefficienti è dispari (ciò accade se il grado del polinomio è pari), per convenzione si considera una coppia di coefficienti equidistanti il termine centrale, contato due volte.

### DEFINIZIONI

Un'equazione è detta **reciproca di prima specie** se, posta nella forma canonica  $p(x)=0$ , il polinomio  $p(x)$  ha i coefficienti dei termini estremi e quelli dei termini equidistanti dagli estremi **uguali**.

Un'equazione è detta **reciproca di seconda specie** se, posta nella forma canonica  $p(x)=0$ , il polinomio  $p(x)$  ha i coefficienti dei termini estremi e quelli dei termini equidistanti dagli estremi **opposti**. In particolare, se  $p(x)$  ha grado  $2k$  (pari), il coefficiente di  $x^k$  è nullo.

- L'equazione  $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$  è un'equazione di terzo grado reciproca di prima specie.
- L'equazione  $3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 3 = 0$  è un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie.
- L'equazione  $-7x^4 + 5x^3 - 5x + 7 = 0$  è un'equazione di quarto grado reciproca di seconda specie.
- L'equazione  $3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 2x - 3 = 0$  è un'equazione di quinto grado reciproca di seconda specie.
- L'equazione  $-2x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 8x + 2 = 0$  è un'equazione di quarto grado, ma non è reciproca di seconda specie, in quanto il coefficiente di secondo grado dovrebbe essere nullo.

Il seguente teorema mette in luce una importante proprietà di cui godono queste equazioni:

**TEOREMA (delle radici reciproche).** Se  $\lambda$  è una radice non nulla di un'equazione reciproca di qualunque grado, allora anche  $\frac{1}{\lambda}$  è radice dell'equazione.

Consideriamo l'equazione reciproca di prima specie  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ .

- **Ipotesi:**  $x = \lambda$  è una radice dell'equazione;
- **Tesi:**  $x = \frac{1}{\lambda}$  è una radice dell'equazione.
- **Dimostrazione:**

Sappiamo che se  $x = \lambda$  è una radice allora è vera l'uguaglianza  $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$  (&). Sostituiamo  $\frac{1}{\lambda}$  al posto della  $x$  nel polinomio al

primo membro, si ha:  $p\left(\frac{1}{\lambda}\right) = a_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} + \dots + a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right) + a_0$  che, svolti i calcoli, diventa

$$p\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{a_0 + a_1\lambda + \dots + a_1\lambda^{n-1} + a_0\lambda^n}{\lambda^n}.$$

Osservando il numeratore notiamo che è proprio quanto scritto in (&) e pertanto, essendo il denominatore diverso da zero, si ha  $p\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$  che dimostra la tesi. C.V.D.

**104** Dimostra il teorema per le equazioni di seconda specie.

**105** Dopo aver verificato che  $x=3$  è radice dell'equazione  $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$ , verificate che l'equazione ammette come soluzione  $x = \frac{1}{3}$ .

Analizziamo i metodi risolutivi per le equazioni reciproche.

### Equazioni di terzo grado reciproche di prima specie

Queste equazioni hanno la seguente struttura:  $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$  e hanno  $x = -1$  come radice: infatti sostituendo tale valore al posto della  $x$  nel polinomio al primo membro si ottiene:  $p(-1) = a_0(-1)^3 + a_1(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 = -a_0 + a_1 - a_1 + a_0 = 0$ .

Ricordiamo che secondo la regola del resto, il valore trovato (zero) ci assicura che il polinomio al primo membro è divisibile per  $x+1$ ; con la divisione polinomiale o con la regola di Ruffini possiamo allora scrivere  $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_1 x + a_0 = (x+1) \cdot (a_0 x^2 + (a_1 - a_0)x + a_0) = 0$  da cui con la legge di annullamento del prodotto possiamo determinare le soluzioni dell'equazione assegnata.

**106** Eseguire la divisione polinomiale tra  $p(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_1 x + a_0$  e il binomio  $x+1$  per verificare la fattorizzazione trovata. In alternativa usare la regola di Ruffini.

#### Esempio

Determinare le radici dell'equazione  $x^3 - 5x^2 - 5x + 1 = 0$ .

Si tratta di un'equazione di terzo grado reciproca di prima specie. Una radice è  $x = -1$  per cui possiamo fattorizzare il polinomio al primo membro eseguendo la divisione polinomiale e ottenere  $(x+1)(x^2 - 6x + 1) = 0$ . Per la legge di annullamento del prodotto otteniamo la radice  $x = -1$  già nota e, risolvendo l'equazione  $x^2 - 6x + 1 = 0$  si trovano le altre radici  $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$  e  $x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$  e quindi  $I.S. = \{-1; 3 + 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}\}$ .

**107** Dimostrare che, in accordo con il teorema delle radici reciproche, le soluzioni  $3 + 2\sqrt{2}$  e  $3 - 2\sqrt{2}$  sono numeri reciproci.

**108** Determinare le soluzioni reali dell'equazione  $3x^3 - 5x^2 - 5x + 3 = 0$ , completando le parti mancanti.

L'equazione assegnata è **reciproca di terzo grado e di prima specie** ammette dunque  $x = -1$  come radice.

Infatti  $p(-1) = \dots\dots\dots$

Il polinomio al primo membro si scompone in  $(x+1)(3x^2 - \dots\dots\dots) = 0$ ; per la legge di annullamento del prodotto avremo  $x+1 = 0 \rightarrow x = -1$  come già noto oppure

$$3x^2 - \dots\dots\dots = 0 \rightarrow x_1 = \dots\dots \vee x_2 = \dots\dots \rightarrow I.S. = \{\dots\dots\dots\}$$

“L'equazione assegnata ha tre soluzioni reali di cui le due irrazionali sono l'una il reciproco dell'altra”. Verificare questa affermazione.

Un modo “alternativo” per determinare l'I.S. dell'equazione reciproca  $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$  consiste nel raccogliere parzialmente i due coefficienti  $a_0$  e  $a_1$ :  $a_0(x^3 + 1) + a_1(x^2 + x) = 0$  da cui  $a_0(x+1)(x^2 - x + 1) + a_1 x(x+1) = 0$  e raccogliendo totalmente il binomio  $(x+1)$  ritroviamo la fattorizzazione precedente:  $(x+1) \cdot (a_0 x^2 + (a_1 - a_0)x + a_0) = 0$ .

**109** Applicare questo metodo “alternativo” all'equazione assegnata nell'esercizio precedente.

### Equazioni di terzo grado reciproche di seconda specie

Queste equazioni hanno la seguente struttura:  $a_0 x^3 + a_1 x^2 - a_1 x - a_0 = 0$  hanno  $x = 1$  come radice, basta verificare sostituendo tale valore al posto della  $x$  nel polinomio al primo membro:  $p(1) = a_0(1)^3 + a_1(1)^2 - a_1(1) - a_0 = a_0 + a_1 - a_1 - a_0 = 0$ .

Procedendo come nel caso precedente si può ottenere la scomposizione in fattori del polinomio al primo membro:  $(x-1) \cdot (a_0 x^2 + (a_0 + a_1)x + a_0) = 0$  e quindi determinare l'I.S. dell'equazione assegnata applicando la legge di annullamento del prodotto.

#### Esempio

Determinare le radici dell'equazione  $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ .

È un'equazione di terzo grado reciproca di seconda specie. Una radice è  $x_1 = 1$  e pertanto l'equazione può essere scritta nel modo seguente:  $(x-1)(2x^2 - 5x + 2) = 0$ . Per la legge di annullamento del prodotto

otteniamo la radice  $x=1$  già nota e risolvendo  $(2x^2-5x+2)=0$  si ricavano le altre due radici:  
 $x_2=2$  e  $x_3=\frac{1}{2}$  e dunque  $I.S. = \left\{1; 2; \frac{1}{2}\right\}$ .

**110** Determinare le soluzioni reali dell'equazione  $2x^3-9x^2+9x-2=0$  completando le parti mancanti.

L'equazione assegnata è **reciproca di terzo grado e di seconda specie** e dunque ammette  $x=+1$  come radice.

Infatti  $p(+1)=\dots\dots\dots$

Il polinomio al primo membro si scompone in  $(x-1)(2x^2-\dots\dots\dots)=0$ . Per la legge di annullamento del prodotto avremo  $x-1=0 \rightarrow x=1$  come già noto oppure

$$2x^2-\dots\dots\dots=0 \rightarrow x_1=\dots\dots \vee x_2=\dots\dots \rightarrow I.S. = \{\dots\dots\dots\}$$

“L'equazione assegnata ha tre soluzioni reali di cui le due irrazionali sono l'una il reciproco dell'altra”. Verificare questa affermazione.

Un modo “alternativo” consiste nel raccogliere parzialmente i due coefficienti  $a_0$  e  $a_1$ :  
 $a_0(x^3-1)+a_1(x^2-x)=0$  da cui  $a_0(x-1)(x^2+x+1)+a_1x(x-1)=0$  e raccogliendo totalmente il binomio  $(x-1)$  ritroviamo la fattorizzazione precedente:  $(x-1)\cdot(a_0x^2+(a_1+a_0)x+a_0)=0$

**111** Applicare questo metodo alternativo all'equazione assegnata nell'esercizio precedente.

**112** Attribuisce ad ogni proposizione il valore di verità:

- l'equazione  $ax^3+bx^2+cx+d=0$  ammette sempre  $x=-1$  come soluzione
- se nell'equazione  $ax^3+bx^2+cx+d=0$  si ha  $a=d$  e  $b=c$  allora  $x=-1$  è una soluzione
- in una equazione reciproca di terzo grado la somma dei coefficienti è nulla
- se nell'equazione  $ax^3+bx^2+cx+d=0$  si ha  $a+d=0$  e  $b+c=0$  allora  $x=1$  appartiene all'I.S.

**113** dimostrare che l'equazione reciproca di terzo grado ha sempre tre radici reali.

### Equazioni di quarto grado reciproche di prima specie

Rientrano in questa classificazione le equazioni del tipo:  $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$

Prima di proporre il metodo risolutivo per una tale equazione osserviamo che  $x=0$  non può essere una radice in quanto, se lo fosse, sarebbe  $a_0=0$  e il grado dell'equazione diventerebbe  $\leq 3$ . Questa premessa ci consente di dividere entrambi i membri dell'equazione per  $x^2$  ottenendo l'equazione

equivalente alla data  $a_0x^2+a_1x+a_2+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}=0$  da cui, raccogliendo parzialmente  $a_0$  e  $a_1$ , troviamo

$$a_0\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a_1\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_2=0$$

Ponendo ora  $t=x+\frac{1}{x}$  quindi  $t^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \rightarrow t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$  da cui  $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$  e sostituendo

trovato nell'equazione  $a_0\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a_1\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_2=0$  ricaviamo la seguente equazione di secondo grado

equivalente alla data:  $a_0(t^2-2)+a_1t+a_2=0 \rightarrow a_0t^2+a_1t+a_2-2a_0=0$

Trovate, se esistono reali, le radici  $t_1$  e  $t_2$  di questa equazione, possiamo determinare le corrispondenti radici dell'equazione iniziale risolvendo le due equazioni  $x+\frac{1}{x}=t_1$  e  $x+\frac{1}{x}=t_2$  fratte nell'incognita  $x$ , rispettivamente equivalenti a  $x^2-t_1x+1=0$ ;  $ax^2-t_2x+1=0$ .

**Si hanno soluzioni reali di queste ultime equazioni se e solo se  $|t| \geq 2$ .** Infatti, risolvendo rispetto a  $x$  l'equazione  $x+\frac{1}{x}=t$ , troviamo:  $x^2-tx+1=0$  e calcolando il discriminante  $\Delta=t^2-4$  vediamo che ci sono soluzioni reali se e solo se  $t^2-4 \geq 0$  ovvero se e solo se  $t \leq -2 \vee t \geq 2$  cioè  $|t| \geq 2$ .

**114** Stabilire quale condizione deve sussistere tra i coefficienti dell'equazione  $a_0(t^2-2)+a_1t+a_2=0 \rightarrow a_0t^2+a_1t+a_2-2a_0=0$  affinché esistano reali i valori della nuova incognita  $t$ .

**Esempio**

Determinare le radici dell'equazione  $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ .

Si tratta di un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie. Ponendo  $t = x + \frac{1}{x}$  arriviamo a risolvere

l'equazione  $1 \cdot (t^2 - 2) - 4t + 5 = 0$  ovvero  $t^2 - 4t + 3 = 0$  da cui  $t_1 = 1$  e  $t_2 = 3$ . Il primo valore  $t_1$  non dà soluzioni reali poiché l'equazione  $x + \frac{1}{x} = 1$  ha il discriminante negativo ( $\Delta = \dots$ ) mentre

l'equazione  $x + \frac{1}{x} = 3$  ha due soluzioni reali distinte  $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  e  $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ . L'equazione assegnata

ha  $I.S. = \left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right\}$ .

**115** Completare il procedimento per la ricerca delle soluzioni dell'equazione reciproca

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Dividiamo ambo i membri dell'equazione per  $x^2$ , certamente diverso da zero e otteniamo:

$$2x^2 + 3x - 16 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow 2 \cdot \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 3 \cdot (\dots) - \dots = 0 \rightarrow 2 \cdot (t^2 - \dots) + 3t = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2t^2 + 3t - 20 = 0 \rightarrow t_1 = \dots \vee t_2 = \dots$$

Poiché i valori di  $t$  soddisfano la condizione  $|t| \geq 2$  equazioni  $x + \frac{1}{x} = t_1$  e  $x + \frac{1}{x} = t_2$  hanno entrambe soluzioni reali distinte ..... pertanto  $I.S. = \{ \dots \}$

**Equazioni di quarto grado reciproche di seconda specie**

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo:  $a_0x^4 + a_1x^3 - a_1x - a_0 = 0$  in cui il coefficiente di  $x^2$  è nullo.

Per risolvere questa equazione, raccogliamo parzialmente  $a_0$  e  $a_1$  ottenendo:  $a_0(x^4 - 1) + a_1(x^3 - x) = 0$

da cui  $a_0(x^2 - 1)(x^2 + 1) + a_1x(x^2 - 1) = 0$  e raccogliendo totalmente il binomio  $(x^2 - 1)$  possiamo

ottenere la fattorizzazione del polinomio al primo membro dell'equazione:  $(x^2 - 1)(a_0(x^2 + 1) + a_1x) = 0$

ovvero  $(x - 1)(x + 1)(a_0x^2 + a_1x + a_0) = 0$

Per la legge di annullamento del prodotto si hanno quindi le due radici  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$  e le eventuali radici reali dell'equazione  $a_0x^2 + a_1x + a_0 = 0$ .

**116** Stabilire quale condizione deve sussistere tra i coefficienti dell'equazione  $a_0x^2 + a_1x + a_0 = 0$  affinché esistano reali le sue soluzioni.

**Esempio**

Determinare le radici dell'equazione  $x^4 - 8x^3 + 8x - 1 = 0$ .

Si tratta di un'equazione di quarto grado reciproca di seconda specie (si osservi che il coefficiente di secondo grado è nullo); mettendo in evidenza il binomio  $(x^2 - 1)$  abbiamo:  $(x^2 - 1)(x^3 - 8x + 1)$  da cui, risolvendo le equazioni  $x^2 - 1 = 0$  e  $x^3 - 8x + 1 = 0$ , otteniamo tutte le radici:

$$x_1 = 1 \vee x_2 = -1 \vee x_3 = 4 + \sqrt{15} \vee x_4 = 4 - \sqrt{15} \text{ e quindi } I.S. = \{-1; 1, 4 + \sqrt{15}; 4 - \sqrt{15}\}$$

**117** Determinare per quale valore di  $k$ , l'equazione  $(2k - \sqrt{2})x^4 + 5x^3 - 5x - 2\sqrt{2} = 0$  è reciproca.

È vero che  $I.S. = \{+1; -1\}$  ? R.  $k = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

**Equazioni di quinto grado reciproche di prima specie**

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo:  $a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ .

Con il raccoglimento parziale possiamo scrivere:  $a_0(x^5 + 1) + a_1(x^4 + x) + a_2(x^3 + x^2) = 0$  e, ricordando la formula per la scomposizione della somma di potenze, abbiamo:

$a_0(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)+a_1x(x+1)(x^2-x+1)+a_2x^2(x+1)=0$  da cui raccogliendo totalmente il binomio  $(x+1)$  ricaviamo:  $(x+1)(a_0(x^4-x^3+x^2-x+1)+a_1x(x^2-x+1)+a_2x^2)=0$  e quindi la fattorizzazione del polinomio al primo membro:

$$(x+1)(a_0x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+a_0)x^2+(a_1-a_0)x+a_0)=0$$

Infine con la legge di annullamento del prodotto si determina la soluzione reale  $x=-1$  e con i metodi analizzati in precedenza le soluzioni dell'equazione di quarto grado  $(a_0x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+a_0)x^2+(a_1-a_0)x+a_0)=0$  e infine l'Insieme Soluzione dell'equazione reciproca di quinto grado.

Si osservi che la stessa uguaglianza può essere ottenuta mediante la divisione polinomiale, dal momento che una radice è  $x=-1$ ; la nuova equazione da risolvere è di quarto grado di prima specie:  $a_0x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+a_0)x^2+(a_1-a_0)x+a_0=0$  e il suo insieme di soluzione si ottiene con i metodi esposti in precedenza.

### Esempio

Determinare le radici dell'equazione  $6x^5+x^4-43x^3-43x^2+x+6=0$ .

L'equazione è di quinto grado reciproca di prima specie. Una radice è  $x_1=-1$ ; con la divisione polinomiale, l'equazione può essere allora riscritta nella forma seguente:

$$(x+1)(6x^4-5x^3-38x^2-5x+6)=0$$

Risolvendo l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie  $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$ , si trovano le altre quattro radici:  $x_2=-2$ ,  $x_3=-\frac{1}{2}$ ,  $x_4=3$ , e  $x_5=\frac{1}{3}$ .

$$I.S. = \left\{ -1; -2; -\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{3} \right\}$$

**118** Verificare mostrando tutti i passaggi le soluzioni dell'equazione reciproca di quarto grado dell'esempio precedente.

### Equazioni di quinto grado reciproche di seconda specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo:  $a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3-a_2x^2-a_1x-a_0=0$ .

Con il raccoglimento parziale si ottiene  $a_0(x^5-1)+a_1(x^4-x)+a_2(x^3-x^2)=0$  e applicando la formula per la somma di potenze, si ha:  $a_0(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)+a_1x(x-1)(x^2+x+1)+a_2x^2(x-1)=0$  da cui, raccogliendo il binomio  $(x-1)$  si ottiene  $(x-1)(a_0(x^4+x^3+x^2+x+1)+a_1x(x^2+x+1)+a_2x^2)=0$  e quindi  $(x+1)(a_0x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+a_0)x^2+(a_1-a_0)x+a_0)=0$

Una radice è  $x=1$  e le altre provengono dall'equazione di quarto grado di prima specie:  $a_0x^4+(a_1+a_0)x^3+(a_2+a_1+a_0)x^2+(a_1+a_0)x+a_0=0$ .

### Esempio

Determinare le radici dell'equazione  $x^5+2x^4-5x^3+5x^2-2x-1=0$ .

È un'equazione di quinto grado reciproca di seconda specie. Una radice è  $x_1=1$ ; con la divisione polinomiale, l'equazione può essere riscritta nella forma seguente:  $(x-1)(x^4+3x^3-2x^2+3x+1)=0$ . Risolvendo l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie  $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$ , si trovano altre due radici reali:  $x_2=-2+\sqrt{3}$  e  $x_3=-2-\sqrt{3}$ , pertanto  $I.S. = \{+1; -2+\sqrt{3}; -2-\sqrt{3}\}$

**119** Nell'equazione  $(2-a)x^5-x^4+(3+a)x^3+2bx^2+x+5b=0$  determinare  $a$  e  $b$  in modo che l'equazione sia reciproca.

$$R. a = -\frac{11}{7}; b = \frac{5}{7}$$

Vi proponiamo un esempio di equazione reciproca di sesto grado:

### Esempio

Determinare le radici dell'equazione  $-x^6+6x^5+6x^4-6x^2-6x+1=0$ .

Si tratta di un'equazione di sesto grado reciproca di seconda specie (si osservi che il termine di terzo grado è

nullo); l'equazione ammette per radici  $x_1=1$  e  $x_2=-1$ , quindi possiamo dividere il polinomio per il binomio  $(x^2-1)$ , ottenendo come quoziente  $-x^4+6x^3+5x^2+6x-1$ ; si tratta allora di risolvere un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie. Si trovano in questo modo altre due radici reali:

$$x_3 = \frac{7+\sqrt{5}}{2}, \quad x_4 = \frac{7-\sqrt{5}}{2}.$$

**120** Eseguire la divisione polinomiale tra il polinomio primo membro dell'equazione assegnata e il binomio  $(x^2-1)$ .

**121** Eseguire tutti i passaggi per determinare le soluzioni dell'equazione reciproca di quarto grado che compare nell'esempio precedente.

**122**  $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$

R.  $I.S. = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}; -1\}$

**123**  $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$

R.  $I.S. = \left\{ \frac{1}{2}; 2; -1 \right\}$

**124**  $6x^3 + 7x^2 - 7x - 6 = 0$

R.  $I.S. = \left\{ -\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; 1 \right\}$

**125**  $2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$

R.  $I.S. = \{-1\}$

**126**  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

R.  $I.S. = \{1\}$

**127**  $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$

R.  $I.S. = \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; 1 \right\}$

**128**  $3x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0$

R.  $I.S. = \{1\}$

**129**  $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$

R.  $I.S. = \left\{ \frac{1}{2}; 2; -1; 1 \right\}$

**130**  $-5x^4 + 3x^3 - 3x + 5 = 0$

R.  $I.S. = \{-1; 1\}$

**131**  $2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 0$

R.  $I.S. = \{1\}$

**132**  $-2x^4 + 8x^3 - 8x + 2 = 0$

R.  $I.S. = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}; -1; 1\}$

**133**  $2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$

R.  $x = -1; x = \frac{7+\sqrt{33}}{4}; x = \frac{7-\sqrt{33}}{4}$

**134**  $3x^3 - 6x^2 - 6x + 3 = 0$

R.  $x = -1; x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

**135**  $5x^3 - 7x^2 + 7x - 5 = 0$

R.  $x = 1$

**136**  $4x^3 - 20x^2 + 20x - 4 = 0$

R.  $x = 1; x = 2 + \sqrt{3}; x = 2 - \sqrt{3}$

**137**  $5x^3 - 5x^2 - 5x + 5 = 0$

R.  $x = 1; x = -1$

**138**  $4x^3 - 9x^2 + 9x - 4 = 0$

R.  $x = 1$

**139**  $\frac{3}{2}x^3 + \frac{7}{4}x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{3}{2} = 0$

R.  $x = 1; x = -\frac{2}{3}; x = -\frac{3}{2}$

**140**  $-2x^3 + 10x^2 + 10x - 2 = 0$

R.  $x = -1; x = 3 + 2\sqrt{2}; x = 3 - 2\sqrt{2}$

**141**  $x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{19}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1 = 0$

R.  $x = 3; x = \frac{1}{3}; x = -2; x = -\frac{1}{2}$

**142**  $x^4 - \frac{9}{4}x^3 - \frac{13}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + 1 = 0$

R.  $x = -1; x = 4; x = \frac{1}{4}$

**143**  $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$

R.  $x = 1$

**144**  $x^4 + \frac{10}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0$

R.  $x = -3; x = -\frac{1}{3}$

**145**  $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$

R.  $x = 2 + \sqrt{3}; x = 2 - \sqrt{3}$

**146**  $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$

R.  $x = 1; x = -1$

**147**  $x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$

R.  $x = 1; x = -1; x = 3 + 2\sqrt{2}; x = 3 - 2\sqrt{2}$

**148**  $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$

R.  $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

- 149  $x^4 - 5x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$  R.  $x = -1; x = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}; x = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$
- 150  $3x^4 - x^3 + x - 3 = 0$  R.  $x = 1; x = -1$
- 151  $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$  R.  $x = 2; x = \frac{1}{2}$
- 152  $2x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 2 = 0$  R. impossibile
- 153  $3x^4 - 7x^3 + 7x - 3 = 0$  R.  $x = 1; x = -1; x = \frac{7+\sqrt{13}}{6}; x = \frac{7-\sqrt{13}}{6}$
- 154  $3x^4 - 6x^3 + 6x - 3 = 0$  R.  $x = 1; x = -1$
- 155  $2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 6x + 2 = 0$  R.  $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
- 156  $x^4 + 8x^3 - 8x - 1 = 0$  R.  $x = 1; x = -1; x = -4 + \sqrt{15}; x = -4 - \sqrt{15}$
- 157  $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$  R.  $x = 1; x = -1$
- 158  $x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$  R.  $x = -1; x = 2 + \sqrt{3}; x = 2 - \sqrt{3}$
- 159  $x^5 + 3x^4 + x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$  R.  $x = 1; x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$
- 160  $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = 0$  R.  $x = 1$
- 161  $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$  R.  $x = 1$
- 162  $x^5 - 5x^3 - 5x^2 + 1 = 0$  R.  $x = -1; x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
- 163  $x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$  R.  $x = 1; x = -2 + \sqrt{3}; x = -2 - \sqrt{3}$
- 164  $2x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 2 = 0$  R.  $x = -1$
- 165  $x^6 - x^5 - 5x^4 + 5x^2 + x - 1 = 0$  R.  $x = 1; x = -1; x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
- 166  $x^6 - x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 = 0$  R.  $x = 1; x = -1$
- 167  $x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$  R.  $x = 1; x = -1$
- 168  $x^5 - \frac{11}{4}x^4 - \frac{55}{8}x^3 + \frac{55}{8}x^2 + \frac{11}{4}x - 1 = 0$  R.  $x = 1; x = 4; x = \frac{1}{4}; x = -2; x = -\frac{1}{2}$
- 169  $x^5 - 4x^4 + \frac{13}{4}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - 4x + 1 = 0$  R.  $x = -1; x = 2; x = \frac{1}{2}$
- 170  $x^6 + \frac{13}{6}x^5 + x^4 - x^2 - \frac{13}{6}x - 1 = 0$  R.  $x = 1; x = -1; x = -\frac{3}{2}; x = -\frac{2}{3}$
- 171  $x^6 + \frac{16}{3}x^5 + \frac{23}{3}x^4 - \frac{23}{3}x^2 - \frac{16}{3}x - 1 = 0$  R.  $x = 1; x = -1; x = -3; x = -\frac{1}{3}$
- 172  $x^6 + x^4 - x^2 - 1 = 0$  R.  $x = 1; x = -1$
- 173  $x^6 - 4x^5 - x^4 + 8x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$  R.  $x = 1; x = -1; x = 2 + \sqrt{3}; x = 2 - \sqrt{3}$
- 174  $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1 = 0$  R. impossibile

Copyright © Matematicamente.it 2011



Questo libro, eccetto dove diversamente specificato, è rilasciato nei termini della Licenza Creative Commons Attribuzione - Non Commerciale - Condividi allo stesso Modo 2.5 Italia il cui testo integrale è disponibile al sito

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/legalcode>

Tu sei libero:

di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera di modificare quest'opera

Alle seguenti condizioni:

**Attribuzione** — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.

**Non commerciale** — Non puoi usare quest'opera per fini commerciali.

**Condividi allo stesso modo** — Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

### **Autori**

Cristina Mocchetti: teoria, esercizi

Francesco Daddi: esercizi

Gemma Fiorito: correzioni

Claudio Carboncini: coordinamento, trascrizione

Antonio Bernardo: coordinamento, esercizi

### **Collaborazione, commenti e suggerimenti**

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C<sup>3</sup> o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a [antoniobernardo@matematicamente.it](mailto:antoniobernardo@matematicamente.it)

### **Versione del documento**

Versione 1.2 del 16.02.2011