FINANZA AZIENDALE
FORMULARIO
TITOLI, PORTAFOGLI E CAPM

BY ANDREA IL MATEMATICO

Sommario

ANALISI DI UN TITOLO

L'analisi di un titolo serve per determinare le caratteristiche di quel titolo.
In particolare dai prezzi (storici o attesi) e dai suoi dividendi vengono determinati i tassi di rendimento.
Da questi ultimi si provvede poi a calcolarne:

- Tasso di rendimento medio
- Varianza
- Deviazione standard

I due principali metodi di riferimento per fare questi calcoli sono l'analisi ex post e l'analisi ex-ante.

ANALISI EX-POST

È la più semplice analisi che può essere fatta su un singolo titolo.
In particolare i dati sui rendimenti, rendimento medio, varianza e deviazione standard vengono calcolati a partire dai prezzi e dividendi storici del titolo

Supponiamo di rilevare per n+1 periodi (da 0 a n) i prezzi e i dividendi di un titolo (prime tre colonne)

Da queste è possibile determinare gli n tassi di rendimento del titolo (quarta colonna) del titolo

Periodo	Prezzo	Dividendo	Tasso di rendimento
0	P_0		
1	P_1	DIV_1	r_1
2	P_2	DIV_2	r_2
...	...	...	
t	P_t	DIV_t	r_t
...	...	...	
n	P_n	DIV_n	r_n

TASSO DI RENDIMENTO DELL'it-ESIMO PERIODO

$$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + DIV_t}{P_{t-1}} = \frac{P_t + DIV_t}{P_{t-1}} - 1$$

Il tasso di rendimento è suddiviso in due componenti: il *capital gain* e il *dividend gain*.
Il *capital gain* è il tasso di rendimento sul capitale ed è dato dalla variazione di prezzo diviso per il prezzo del periodo precedente.

Si può definire anche come il tasso di variazione sul capitale o sul prezzo dell'azione o del titolo.

$r_t = \text{CAPITAL GAIN} + \text{DIVIDEND GAIN}$

$\text{CAPITAL GAIN} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$

Il *dividend gain* è il tasso di rendimento del dividendo rispetto al prezzo del titolo.
Esso è calcolato come il rapporto tra il valore del dividendo nel periodo i-esimo ed il prezzo del titolo nel periodo precedente.

$$\text{CAPITAL GAIN} = \frac{DIV_t}{P_{t-1}}$$

Nota bene: molto spesso nelle analisi "veloci" possiamo trascurare i dividendi e calcolare i tassi di rendimento solamente sull'evoluzione storica dei titoli

RENDIMENTO MEDIO, VARIANZA E DEVIAZIONE STANDARD

Una volta calcolati i tassi di rendimento dei titoli possiamo calcolare rendimento medio varianza e deviazione standard

RENDIMENTO MEDIO

È la sommatoria dei rendimenti divisa per il numero n di rilevazioni

$$E(r) = \bar{r} = \frac{\sum r_t}{n}$$

(la sommatoria riguarda t che va da 1 ad n)

Per indicare due titoli diversi (i e j) possiamo scrivere

$$E(r_i) = \bar{r_i} = \frac{\sum r_{it}}{n} \qquad E(r_j) = \bar{r_j} = \frac{\sum r_{it}}{n}$$

VARIANZA DEI RENDIMENTI (CAMPIONARIA)

La varianza dei rendimenti è la sommatoria dei quadrati degli scarti dalla madia divisa per n–1

$$\sigma^2 = \sigma^2(r) = var = var(r) = \frac{\sum (r_t - \bar{r})^2}{n-1}$$

Un secondo interessante modo per calcolarla è il seguente:
la varianza è la differenza tra: la somma dei quadrati dei rendimenti divisa per n–1 e il quadrato della media moltiplicato per n e diviso per n–1

$$\sigma^2 = \frac{\sum r_t^2}{n-1} - \bar{r}^2 \cdot \frac{n}{n-1}$$

Se vogliamo specificare che si tratta della varianza dei rendimenti di un singolo titolo i possiamo utilizzare le scritture

$$\sigma_i^2 = \sigma^2(r_i) = var_i = var(r_i) = \sigma_{r_i}^2$$

DEVIAZIONE STANDARD

La deviazione standard è la radice quadrata della varianza.
Viene definita anche scarto quadratico medio, rischio o volatilità del titolo ed è espressa nella stessa unità di misura del tasso di rendimento

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$$

ANALISI EX-ANTE

L'analisi ex ante di un titolo stima il rendimento medio, la varianza e la deviazione standard a partire da scenari probabilistici.
In particolare si suppongono per un dato titolo degli scenari futuri associati a loro volta ad una data probabilità.
In base allo scenario che si delinea cambia il tasso di rendimento atteso del titolo

Scenari	probabilità	Tasso di rendimento
1	p_1	r_1
2	p_2	r_2
…	…	
k	p_k	r_k
…	…	
n	p_n	r_n

RENDIMENTO MEDIO, VARIANZA E DEVIAZIONE STANDARD

Il tasso di rendimento, la varianza e la deviazione standard di ogni titolo dipendono dai rendimenti e dalle probabilità associati ad ogni scenario

RENDIMENTO MEDIO

E la media dei rendimenti ponderata per le probabilità

$$E(r) = \bar{r} = \sum r_k \cdot p_k$$

Ipotizziamo che per due titoli i e j vengano delineati gli stessi scenari di probabilità
Per indicare due titoli diversi (i e j) possiamo scrivere

$$E(r_x) = \bar{r_i} = \sum r_{ik} \cdot p_k \qquad E(r_y) = \bar{r_y} = \sum r_{jk} \cdot p_k$$

NB: nel caso in cui gli scenari probabilistici sino diversi per ogni titoli dobbiamo utilizzare i teoremi delle probabilità per eventi indipendenti e dipendenti

VARIANZA DEI RENDIMENTI

La varianza dei rendimenti è la media dei quadrati degli scarti dal valore medio ponderata per le probabilità

$$\sigma^2 = \sigma^2(r) = var = var(r) = \sum (r_k - \bar{r})^2 \cdot p_k$$

Un secondo interessante modo per calcolarla è il seguente:
la varianza è la differenza tra: la media (somma) dei quadrati dei rendimenti ponderata per le probabilità e il quadrato del valore medio

$$\sigma^2 = \sum r_k^2 \cdot p_k - \bar{r}^2$$

DEVIAZIONE STANDARD

La deviazione standard è la radice quadrata della varianza.
Viene definita anche scarto quadratico medio, rischio o volatilità del titolo ed è espressa nella stessa unità di misura del tasso di rendimento

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$$

ANALISI DI DUE TITOLI

Quando facciamo l'analisi di due titoli (ad esempio i e j) dobbiamo introdurre i concetti di:
- Covarianza
- Correlazione
- Indice di determinazione
- Beta di un titolo rispetto all'altro

COVARIANZA

Per calcolare la covarianza dobbiamo distinguere sempre tra l'analisi ex-post ed ex-ante

Nell'analisi ex-post la covarianza può essere calcolata in due modi.
Il primo modo è quello di fare la sommatoria (per t che va da 1 a n) dei prodotti tra gli scarti dei due titoli diviso per n–1

$$cov(r_i, r_j) = cov_{ij} = \sigma_{ij} = \frac{\sum (r_{it} - \overline{r_i})(r_{jt} - \overline{r_j})}{n-1}$$

In modo alternativo possiamo anche calcolarla nel seguente modo:

facciamo la differenza tra:

- la sommatoria del prodotto dei rendimenti divisa per n–1
- il valore medo moltiplicato per n e diviso per n–1

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum r_{it} \cdot r_{jt}}{n-1} - \overline{r_i} \cdot \overline{r_i} \cdot \frac{n}{n-1}$$

Anche nell’analisi ex-ante possiamo usare due modi per calcolare la covarianza tra i rendimenti.

Il primo è fare la media (sommatoria) del prodotto degli scarti dei due titoli ponderata per le probabilità degli scenari

$$\sigma_{ij} = \sum (r_{ik} - \overline{r_i})(r_{jk} - \overline{r_j}) \cdot p_k$$

Mentre il secondo è fare la differenza tra:

- la sommatoria tra il prodotto tra i rendimenti dei titoli nei vari scenari e le probabilità
- il prodotto tra i valori medi

$$\sigma_{ij} = \sum r_{ik} \cdot r_{jk} \cdot p_k - \overline{r_i} \cdot \overline{r_i}$$

CORRELAZIONE

L’indice di correlazione è un valore compreso tra –1 e +1 ed indica il grado di correlazione positiva o negativa (allineamento) tra i rendimenti dei due titoli

Viene calcolata come il rapporto tra la covarianza e il prodotto degli scarti dei titoli

$$= cor(r_i, r_j) = \rho(r_i, r_j) = \rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$$

INDICE DI DETERMINAZIONE

L’indice di determinazione assume valori compresi tra 0 e 1 ed indica il grado di connessione a livello percentuale tra i rendimenti dei due titoli.

Per calcolarlo facciamo il quadrato dell’indice di correlazione lineare

$$R^2 = \rho_{ij}^2$$

BETA DEI TITOLI

Il beta del titolo i rispetto al titolo j indica nel modello lineare di quante unità aumenta/diminuisce il titolo i per ogni unità di aumento del titolo j

Nella retta di regressione coincide con il coefficiente angolare.

Si calcola dividendo la covarianza tra i e j per la varianza del titolo i

$$\beta(r_i|r_j) = \beta_{i|j} = \beta_{i,j} = \beta_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i^2}$$

In questa relazione supponiamo che i rendimenti del titolo i dipendano dall'andamento dei rendimenti del titolo j

Ovviamente potremmo anche invertire la relazione (basta invertire le lettere)

$$\beta(r_j|r_i) = \beta_{j|i} = \beta_{j,i} = \beta_{ji} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_j^2}$$

MODELLO DI REGRESSIONE LINEARE

Il calcolo del beta conduce al modello di regressione lineare

$$r_i = \alpha_i + \beta_{ij} \cdot r_j + \varepsilon_i$$

ε_i *rappresenta il termine di errore del modello*

Il modello lineare minimizza la sommatoria del quadrato degli errori

$$\sum \varepsilon_i^2 = min$$

Da qui parte tutta una serie di studi che portano ai concetti di

- varianza spiegata e non spiegata
- Analisi dei residui
- Modello di Markoviz
- Capital market line (CML)
- Security market line
- Modelli multifattoriali
-

ALCUNE RELAZIONI INTERESSANTI

L'indice di determinazione è il prodotto tra i beta complementari

$$R^2 = \rho_{ij}^2 = \beta_{ij} \cdot \beta_{ji}$$

Il beta (ij) è il prodotto tra la correlazione e il rapporto tra il sigma di i e il sigma di j (sigma è la deviazione standard)

$$\beta_{ij} = \rho_{ij} \frac{\sigma_i}{\sigma_j}$$

Elevando alla seconda:

$$\beta_{ij}^2 = \rho_{ij}^2 \frac{\sigma_i^2}{\sigma_j^2} \qquad \rho_{ij}^2 = R^2$$

Da cui possiamo ricavare l'indice di determinazione

$$R^2 = \frac{\beta_{ij}^2 \cdot \sigma_j^2}{\sigma_i^2} = \frac{\text{var. spiegata}}{\text{var. totale}}$$

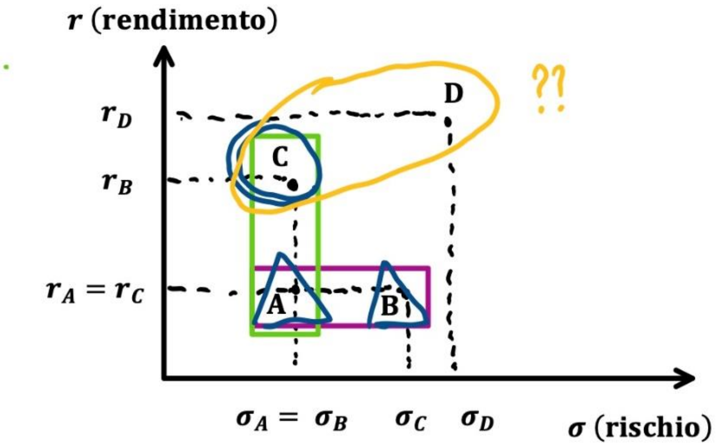
DOMINANZA DI UN TITOLO RISPETTO AD UN ALTRO

Il concetto di dominanza di un titolo è cruciale per le scelte di investimento tra due (o più) titoli.

A parità di rischio (deviazione standard) scegliamo il titolo con rendimento maggiore. (1)

A parità di rendimento scegliamo il titolo con varianza (o deviazione standard) minore. (2)

Possiamo rappresentare i titoli in un sistema cartesiano con rischio (asse x) e rendimento (asse y)



$A \succ B$ si legge "A domina B" (a parità di rendimento A presenta un rischio minore)

$C \succ A$ si legge "A domina B" (a parità di rischio C presenta un rendimento maggiore)

Nulla possiamo dire sulla dominanza tra C e B poiché a maggiore rischio corrisponde anche maggiore rendimento.

Per questo servirebbe una funzione di utilità.

PORTAFOGLIO CON DUE TITOLI

Quando vogliamo formare un portafoglio di due titoli possiamo calcolare rendimento atteso e rischio sulla base delle quote di titoli

TASSO DI RENDIMENTO ATTESO

$$\boldsymbol{r_P = r_A \cdot x_A + r_B \cdot x_B}$$

r_P è il tasso di rendimento atteso del portafofoglio P

r_A, r_B sono i tassi di rendimento attesi dei due titoli

x_A, x_B sono le quote di portafoglio dei due titoli

Alcuni testi riportano al posto della x la w (per identificare i pesi dei titoli)

$$r_P = r_A \cdot w_A + r_B \cdot w_B$$

VARIANZA DEL PORTAFOGLIO

$$\boldsymbol{\sigma_P^2 = \sigma_A^2 w_A^2 + \sigma_B^2 w_B^2 + 2\sigma_{AB} w_A w_B}$$

σ_P^2 è la varianza del portafoglio

σ_A^2 σ_B^2 sono le varianze dei titoli

σ_{AB} è la covarianza tra A e B

In maniera più estesa la formula diventa

$$\boldsymbol{\sigma_P^2 = \sigma_A^2 w_A^2 + \sigma_B^2 w_B^2 + 2\rho_{AB}\, \sigma_A\, \sigma_B w_A w_B}$$

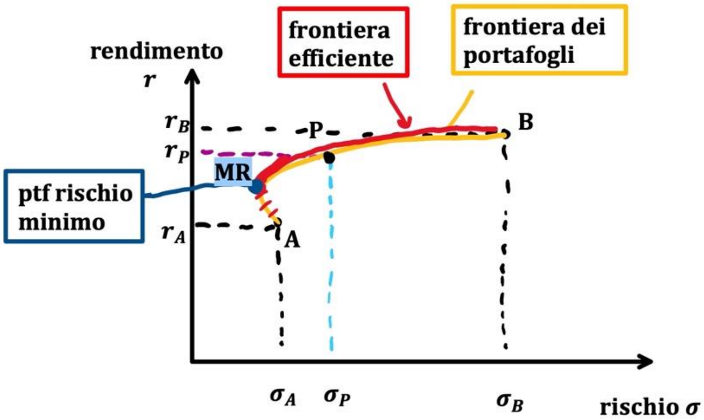
ρ_{AB} è la correlazione tra A e B

σ_A σ_B sono le deviazioni standard dei titoli

PORTAFOGLIO DI MINIMO RISCHIO

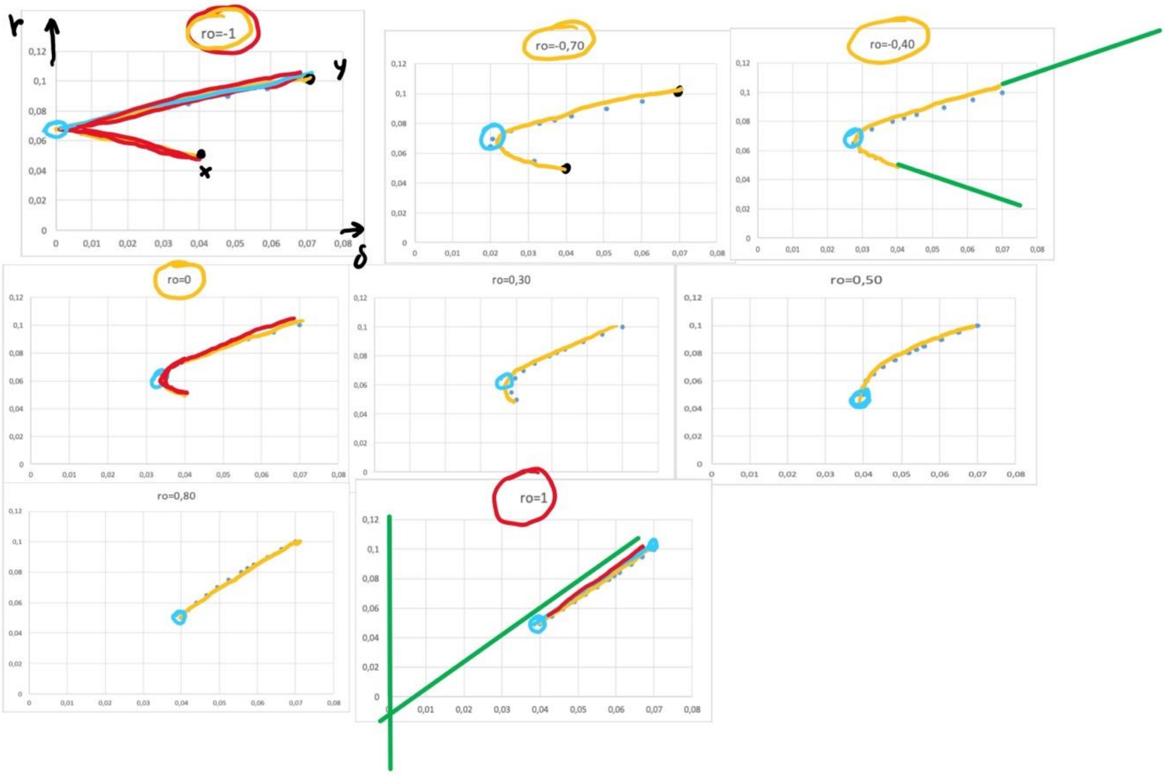
$$w_{A(MR)} = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}} \qquad w_{B(MR)} = 1 - w_{A(MR)} = \frac{\sigma_A^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}}$$

Sono le quote di A e B che garantisce il minimo rischio del portafoglio



FRONTIERA DEI PORTAFOGLI AL VARIARE DELLA CORRELAZIONE

Al variare della correlazione tra i due titoli A e B cambia anche la forma della frontiera dei portafogli.



CASI PARTICOLARI DI CORRELAZIONE

In tutti i casi la formula per il rendimento del portafoglio rimane sempre la stessa.
Si “modifica” la formula per il rischio (diventa più particolare)

PERFETTA CORRELAZIONE POSITIVA (ρ=1)

La frontiera diventa una retta che congiunge il punto A al punto B e il rischio è la media ponderata dei rischi

$$\sigma_P = \sigma_A w_A + \sigma_B w_B$$

Il portafoglio di minimo rischio (senza possibilità di vendere allo scoperto) è composto al 100% dal titolo che presenta varianza minore

ASSENZA DI CORRELAZIONE (ρ=0)

In assenza di correlazione lineare anche la covarianza tra A e B vale zero.
La frontiera diventa una parabola che ha nel suo vertice il portafoglio di minimo rischio.

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_A^2 w_A^2 + \sigma_B^2 w_B^2}$$

$$w_{A(MR)} = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

PERFETTA CORRELAZIONE NEGATIVA (ρ=–1)

Quando la correlazione è perfettamente negativa la frontiera

$$\sigma_P = |\sigma_A w_A - \sigma_B w_B|$$

$$w_{A(MR)} = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$$

Il portafoglio di minimo rischio è un titolo risk-free.

PORTAFOGLIO RISK FREE + AZIONI

	rendim	rischio	quote
TITOLO RISK FREE	r_f	$\sigma_f = 0$	$w_f = 1 - x$
TITOLO AZIONARIO	r_{AZ}	σ_{AZ}	$w_{AZ} = x$

RENDIMENTO

$$r_P = r_{AZ}w_{AZ} + r_f w_f$$

$$\boxed{r_P = r_{AZ}x + r_f(1 - x)}$$

$$x(r_{AZ} - r_f) = r_P - r_f$$

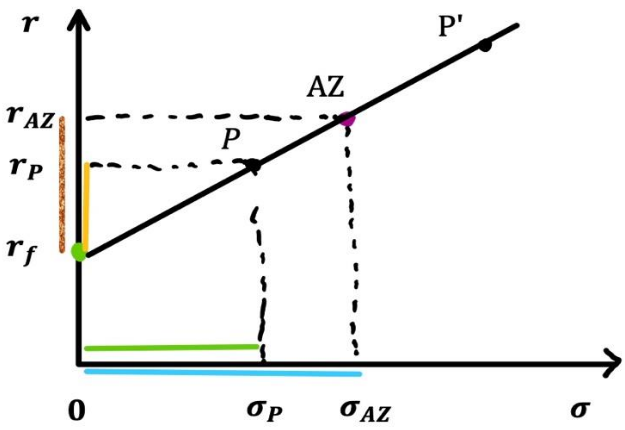
$$x = \frac{\boxed{r_P - r_f}}{\boxed{r_{AZ} - r_f}}$$

RISCHIO

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_{AZ}^2\, x^2 + \sigma_f^2(1-x)^2 + 2\sigma_{AZ}\sigma_f\rho_{Af}\, x\,(1-x)}$$

Siccome $\sigma_f = 0 \;\; \rightarrow \;\; \sigma_P = \sqrt{\sigma_{AZ}^2\, x^2} = \sigma_{AZ}x$

$$x = \frac{\boxed{\sigma_P}}{\boxed{\sigma_{AZ}}}$$



PORTAFOGLI CON N TITOLI

Le informazioni viste per i portafogli con 2 titoli possono essere ampliate per portafogli con n titoli

In questa situazione ci conviene utilizzare un linguaggio di tipo matriciale.

RENDIMENTO TITITOLI, MATRICE VARIANZA-COVARIANZA,

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1j} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2j} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \dots & \sigma_{ij} & \dots & \sigma_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nj} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$