

STATISTICA FORMULARIO PROBABILITÀ

BY ANDREA IL MATEMATICO

Sommario

<u>DISPOSIZIONI E COMBINAZIONI</u>	<u>3</u>
FATTORIALE	3
DISPOSIZIONI	3
COMBINAZIONI	3
<u>CONCETTO DI PROBABILITÀ</u>	<u>4</u>
CONCETTI BASE	4
PROBABILITÀ COMPLEMENTARE	4
INSIEME VUOTO	4
<u>EVENTI COMPATIBILI, INCOMPATIBILI, DIPENDENTI E INDIPENDENTI.....</u>	<u>5</u>
INCOMPATIBILI	5
COMPATIBILI.....	5
EVENTI INDIPENDENTI.....	5
EVENTI DIPENDENTI	5
<u>TEOREMA DI BAYES.....</u>	<u>6</u>
TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE	6
TEOREMA DI BAYES	6

<u>VARIABILI CAUSALI DISCRETE E CONTINUE</u>	7
VARIABILI CASUALI DISCRETE	7
VARIABILI CAUSALI CONTINUE	7
DISUGUALIANZA DI CEBICEV.....	7
<u>CASI PARTICOLARI DI DISTRIBUZIONI DISCRETE</u>	8
DISTRIBUZIONE UNIFORME	8
DISTRIBUZIONE BINOMIALE	8
DISTRIBUZIONE DI POISSON	8
<u>CASI PARTICOLARI DI DISTRIBUZIONI CONTINUE</u>	9
DISTRIBUZIONE CONTUINUA UNIFORME.....	9
DISTRIBUZIONE NORMALE	9

DISPOSIZIONI E COMBINAZIONI

FATTORIALE

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n$$

DISPOSIZIONI

In quanti modi possiamo disporre k elementi su un gruppo di n elementi quando conta la posizione?

SENZA RIPETIZIONE

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n - k)!}$$

CON RIPETIZIONE

$$D'_{n,k} = n^k$$

COMBINAZIONI

In quanti modi possiamo disporre k elementi su un gruppo di n elementi quando **non** conta la posizione?

SENZA RIPETIZIONE

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

CON RIPETIZIONE

$$C'_{n,k} = \binom{n + k - 1}{k} = \frac{(n + k - 1)!}{k! (n - 1)!}$$

CONCETTO DI PROBABILITÀ

CONCETTI BASE

Ω = spazio campionario

A = sottoinsieme di Ω

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A) = \frac{\text{n. casi favorevoli}}{\text{n. casi possibili}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

PROBABILITÀ COMPLEMENTARE

\bar{A} = insieme complementare ad A

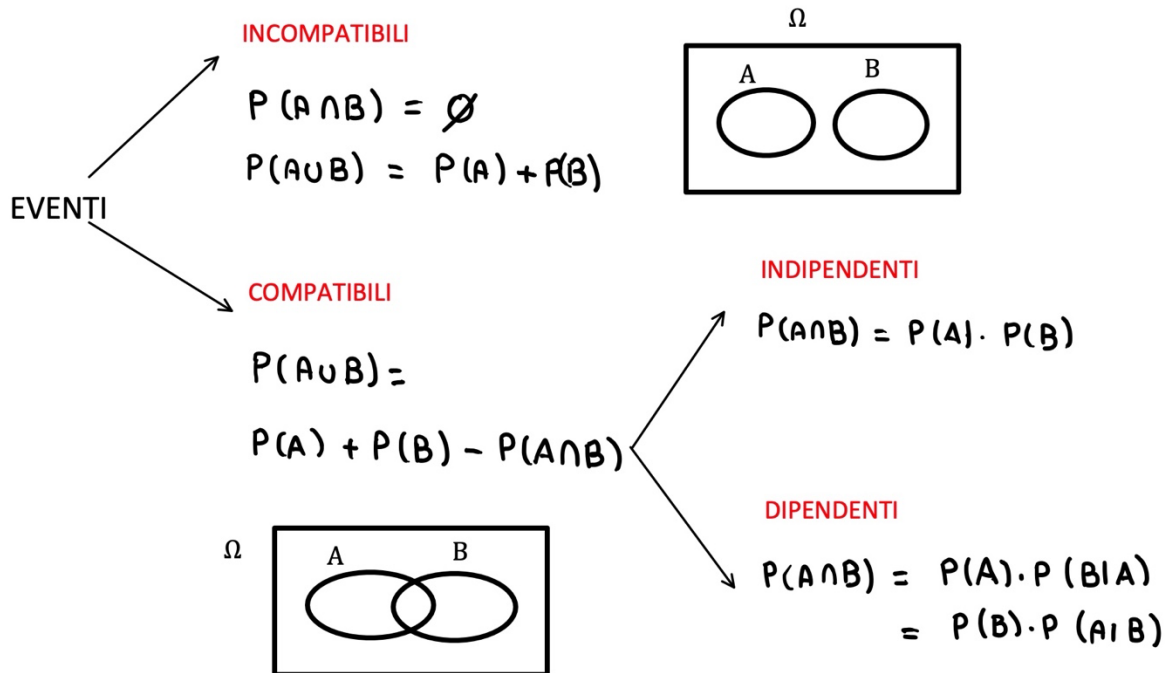
$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

INSIEME VUOTO

$\emptyset = \bar{\Omega} =$ insieme vuoto

$$P(\emptyset) = 0 \rightarrow P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + 0 = 1$$

EVENTI COMPATIBILI, INCOMPATIBILI, DIPENDENTI E INDIPENDENTI



INCOMPATIBILI

L'insieme intersezione è vuoto. La probabilità di intersezione è nulla

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = 0$$

La probabilità dell'unione è la somma delle probabilità

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

COMPATIBILI

L'insieme intersezione non è vuoto. La probabilità di intersezione è maggiore di zero

$$A \cap B \neq \emptyset \rightarrow P(A \cap B) > 0$$

La probabilità dell'unione è la somma delle probabilità meno la probabilità dell'intersezione

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Calcoliamo questa probabilità a seconda che gli eventi A e B siano dipendenti o indipendenti

EVENTI INDIPENDENTI

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

EVENTI DIPENDENTI

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATE

$P(B|A)$ = è la probabilità di B condizionata ad A

$P(A|B)$ = è la probabilità di A condizionata ad B

TEOREMA DI BAYES

Si consideri uno spazio campionario Ω

Lo si suddivida in n sottoinsiemi: H_1, H_2, \dots, H_n complementari e incompatibili (questo sono le **cause**) quindi tali che:

$$H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$$

$$H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i, j$$

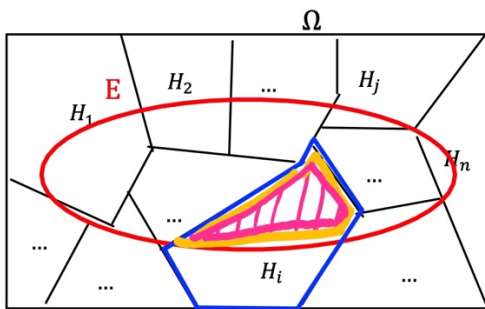
Dunque a livello di probabilità avremo che:

$$P(H_i \cap H_j) = 0 \quad \forall i, j$$

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$$

Si consideri ora un evento A (**effetto**) interno ad Ω ($A \in \Omega$) che abbia almeno un'intersezione con ognuno degli eventi H_i

$$A \cap H_i \neq \emptyset \quad \forall i \rightarrow P(A \cap H_i) > 0$$



TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE

L'insieme A può essere visto come 'unione di tutte le intersezioni di A con i vari insiemi H_i

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n)$$

Dunque la sua probabilità è data dalla somma delle probabilità degli insiemi intersezioni

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots + P(A \cap H_n)$$

La probabilità dell'intersezione tra A e l'evento H_i è essere vista come la probabilità di H_i moltiplicata per la probabilità di A dato H_i

$$P(A \cap H_i) = P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

Dunque la probabilità di A diventa

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$$

$$P(A) = \sum P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

TEOREMA DI BAYES

La probabilità che l'effetto A sia stato provocato dalla causa j -esima H_j è:

$$P(H_j|A) = \frac{P(A \cap H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A|H_j)}{\sum P(H_i) \cdot P(A|H_i)}$$

VARIABILI CAUSALI DISCRETE E CONTINUE

VARIABILI CASUALI DISCRETE

Le variabili casuali discrete assumono determinati valori x_1, x_2, \dots, x_n finiti o infiniti
In molti casi questi valori coincidono con i numeri naturali (0,1, 2, ...)
Vengono rappresentate spesso con un **grafico a bastoncini**.

Il valore **medio** (expected value) è:

$$E(x) = \sum x_i \cdot p(x_i)$$

La **varianza** è:

$$VAR(x) = \sum x_i^2 \cdot p(x_i) - (E(x))^2$$

La **deviazione standard** è la radice quadrata della varianza

$$ds(x) = \sqrt{VAR(x)}$$

VARIABILI CAUSALI CONTINUE

Le variabili casuali continue possono assumere qualsiasi valore reale di un certo intervallo.
Esempi possono essere: pesi, altezze, reddito.

Definiamo $f(x)$ la funzione di densità di probabilità tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Il valore **medio** (expected value) è:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

La **varianza** è:

$$VAR(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (E(x))^2$$

La **deviazione standard** è la radice quadrata della varianza

$$ds(x) = \sqrt{VAR(x)}$$

DISUGUALIANZA DI CEBICEV

La disuguaglianza di Cebicév afferma che la probabilità che una variabile casuale x assuma un valore distante dalla sua media μ più di k volte la sua deviazione standard σ è al massimo pari a $1/k^2$

$$P(|x - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Oppure possiamo scrivere in termini complementari

$$P(|x - \mu| < k\sigma) > 1 - \frac{1}{k^2}$$

Questi risultati sono importanti per la teoria inferenziale.

CASI PARTICOLARI DI DISTRIBUZIONI DISCRETE

- Costante
- Binomiale
- Poisson

DISTRIBUZIONE UNIFORME

Estremi: $[a, b]$

Modalità: $\{a, \dots, a + \frac{i-1}{n-1}(b-a), \dots, b\}$

Funzione di probabilità: $P(x) = \frac{1}{n}$

Valore medio= mediana: $\mu = \frac{a+b}{2}$

Varianza: $\frac{(b-a)^2}{12} \cdot \frac{n+1}{n-1} = \frac{n^2-1}{12}$

Funzione di ripartizione: $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

La distribuzione binomiale prevede n prove indipendenti, ognuna della quali ha una probabilità π di successo e si calcola la probabilità di avere esattamente x successi

$$P(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

Il valore **medio** (expected value): $E(x) = n \cdot \pi$

La **varianza**: $VAR(x) = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)$

La **deviazione standard**: $ds(x) = \sqrt{VAR(x)} = \sqrt{n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)}$

DISTRIBUZIONE DI POISSON

Nella distribuzione di Poisson si verifica che un certo evento si manifesta λ volte in una certa unità spazio-temporale T .

λ è sia il valore medio che la varianza della distribuzione

$$P(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

Il valore **medio** (expected value): $E(x) = \lambda$

La **varianza**: $VAR(x) = \lambda$

La **deviazione standard**: $ds(x) = \sqrt{VAR(x)} = \sqrt{\lambda}$

CASI PARTICOLARI DI DISTRIBUZIONI CONTINUE

- Uniforme
- Normale
- Esponenziale

DISTRIBUZIONE CONTINUA UNIFORME

Estremi: $[a, b]$

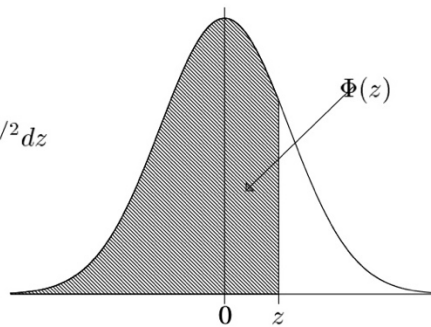
Funzione di densità di probabilità: $f(x) = \frac{1}{b-a}$

Valore medio= mediana: $\mu = \frac{a+b}{2}$

Varianza: $\frac{(b-a)^2}{12}$

DISTRIBUZIONE NORMALE

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$



Detta anche a campana di Gauss La più importante distribuzione di probabilità di tutta la statistica
La sua equazione è:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Considerando che la z è una variabile standardizzata rispetto alla x possiamo derivare la forma generica della distribuzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

Per la distribuzione normale la media, la varianza e la deviazione standard risultano rispettivamente:

$$\mu_{NST} = 0 \quad \sigma_{NST}^2 = 1 \quad \sigma_{NST} = 1$$

Vi sono apposite tavole per calcolare i valori della probabilità o i percentili

[Tavole della norma le standardizzata](#)

FUNZIONE ESPONENZIALE

Funzione di densità di probabilità: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Funzione di ripartizione: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Media: $E(x) = \frac{1}{\lambda}$

Mediana: $Me(x) = \frac{\log 2}{\lambda}$

Varianza: $var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$